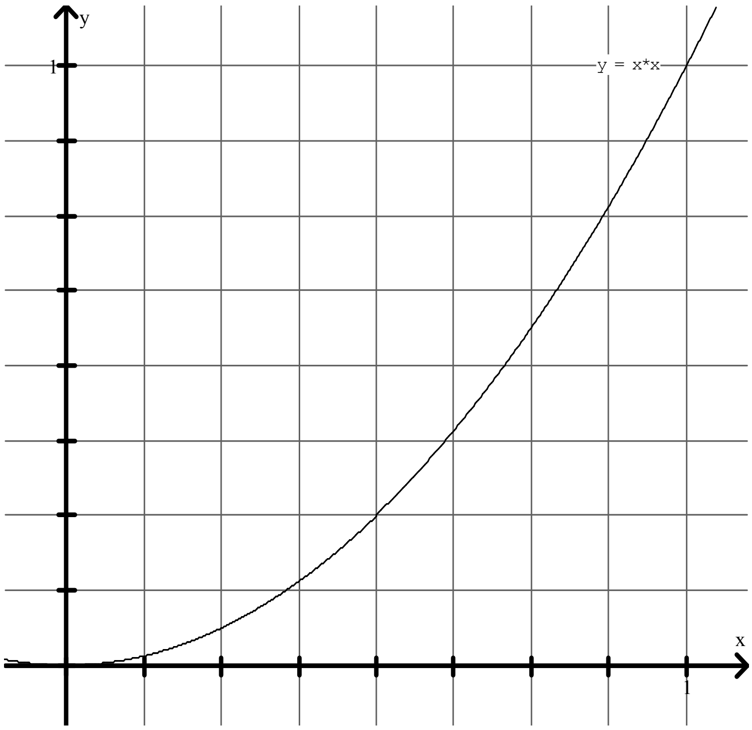
2. Historischer Weg (Archimedes): Streifenmethode

Gesucht: der zwischen x = 0 und x = 1 gelegene Flächeninhalt unter dem Graphen von $f(x) = x^2$



Lösungsmöglichkeit:
Man teile das x-Intervall [0; 1] in n gleich große Teilintervalle, Breite je 1/n, auf (hier n = 8). Eine Näherung für die gesuchte Fläche erhält man, wenn man alle Rechtecksflächenstreifen, deren Höhe dem jeweils größten Funktionswert des Teilintervalls entspricht, zusammenzählt. Der berechnete Flächeninhalt ist dann sicher größer als der gesuchte (Obersumme)

In gleicher Weise erhält man eine „zu kleine" Näherung, wenn die Rechtecksflächen jeweils den kleinsten Funktionswerten entsprechen (Untersumme)

Für sehr große n wird man erwarten dürfen, dass bei beiden Methoden der Flächenwert sehr genau angenähert wird.

Die Rechnung ergibt allgemein (bedenke $A_{Rechteck} = g \cdot h$ mit $g = 1/n$ für alle Rechtecke)

Obersumme: **Untersumme:**

$$\overline{S_n} = \tfrac{1}{n} \cdot (\tfrac{1}{n})^2 + \tfrac{1}{n} \cdot (\tfrac{2}{n})^2 + \ldots + \tfrac{1}{n} \cdot (\tfrac{n}{n})^2 =$$
$$= \tfrac{1}{n} \cdot [(\tfrac{1}{n})^2 + (\tfrac{2}{n})^2 + \ldots + (\tfrac{n}{n})^2] =$$
$$= \tfrac{1}{n^3} \cdot [1^2 + 2^2 + \ldots + n^2](FS!)$$
$$= \tfrac{1}{n^3} \cdot \tfrac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

Für jedes beliebig große n lässt sich so jeweils eine Näherung für A berechnen.

Versuch: Einen Grenzwert für $n \to \infty$ zu finden, das nämlich müsste der exakte Flächeninhalt sein!

Es ergibt sich jeweils:

$$\overline{S_n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \ldots =$$
$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Erwartungsgemäß ergibt sich in beiden Fällen der gleiche Grenzwert 1/3.
Also ist A = 1/3 [FE] (weil ja $\underline{S_n} < A < \overline{S_n}$)

Feststellung:
Flächeninhalte von Flächen, die von stetigen Funktionsgraphen begrenzt werden, lassen sich – wenigstens näherungsweise – immer mit der Streifenmethode berechnen. Dazu müssen die gebildeten Rechtecksstreifen nicht einmal die gleiche Breite besitzen. Außerdem kann man als Rechteckshöhe irgendeinen Funktionswert $f(\xi_i)$ aus dem jeweiligen Intervall $[x_{i-1}; x_i]$ verwenden.