# Infinitesimalrechnung

infinitesimal, lat. unendlich

Die Infinitesimalrechnung beschäftigt sich mit mathematischen Problemen, die zur Lösung einen Grenzprozess erfordern.

Analysis, gr. Zergliederung eines Ganzen in seine Teile
Sammelbegriff für math. Teilgebiete, die die Infinitesimalrechnung benutzen.

# I Stammfunktion und unbestimmtes Integral

## 1 Die Stammfunktion

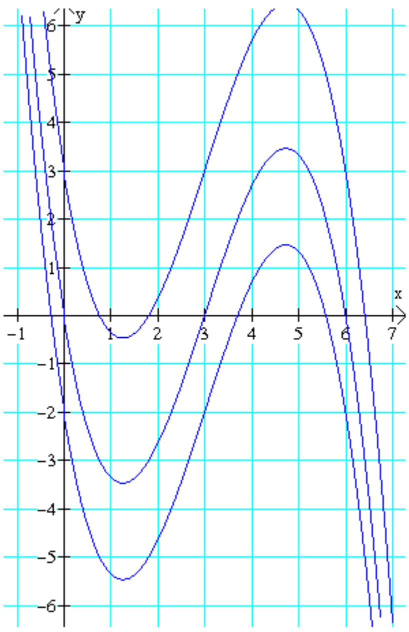
Bisher in der 11. Klasse: Gegeben: Funktion g
Gesucht: Ableitung g'
Neu: Gegeben: Funktion f
Gesucht: Von welcher Funktion F ist f die Ableitung?

**Definition:**
Jede differenzierbare Funktion F mit F' = f heißt **Stammfunktion von f.**

**Beispiel:**
$f(x) = -x^2 + 6x - 6$ $D_f = \mathbb{R}$
$F(x) = -1/3\, x^3 + 3x^2 - 6x$, $D_f = \mathbb{R}$, d. h. $F'(x) = f(x)$

Ist das die einzige mögliche Stammfunktion?

**Weitere mögliche Stammfunktionen:**
$F_1(x) = -1/3\, x^3 + 3x^2 - 6x + 1$
$F_{\sqrt{7}}(x) = -1/3\, x^3 + 3x^2 - 6x + \sqrt{7}$
$F_{-2000003}(x) = -1/3\, x^3 + 3x^2 - 6x - 2000003$




*Da die Konstante beim Differenzieren Null wird, kann aus der Kenntnis der Funktion f nicht ermittelt werden, was die Konstante der Funktion F war. Die möglichen Funktionsterme unterscheiden sich im letzten Summanden. Ihre Graphen gehen durch Parallelverschiebung längs der y- Achse auseinander hervor*

**Allgemein:**
$F_c(x) = --1/3\, x^3 + 3x^2 - 6x + c$
Es gibt unendlich viele Funktionen, deren Ableitung f ist. Sie gehen durch Verschiebung längs der y-Achse auseinander hervor. Die Steigungen sind immer gleich.

Graphen beschriften: $G_{Fc1...}$

**Definition:**
Die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion f heißt **unbestimmtes Integral von f.**
Man schreibt: $\int f(x)dx$
Und spricht: Integral f von x d x

***Bemerkung:*** *Aus der 11. Klasse ist bekannt: y' = dy/dx (Leibnizsche Schreibweise)*

**Bekannt:**
$(x^r)' = d/dx\,(x^r) = dx^r/dx = r \cdot x^{r-1}$, r
Bsp: $y = x^{-5}$, $y' = \ldots$; $y = \sqrt[3]{x}$ ...

**Integrationsregeln:**

1. f (x) = a $\quad \int a dx = ax + c$

*Schreibweise rechts unsauber, da eigentlich eine Menge von Funktionen, aber gebräuchlich.*

2. $f(x) = x^r \quad \int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + c$ , r $\quad \backslash \{-1\}$
3. $f(x) = \sin x \quad \int \sin x dx = -\cos x + c$
4. $f(x) = \cos x \quad \int \cos x dx = \sin x + c$
5. $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$
6. $\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Erklärung zu 5) und 6)
$(kf(x))' = k \cdot f'(x)$
$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

**Beispiele:**

1. $\int x^2 + x^3 dx$
2. $\int \frac{5}{x^4} dx$
3. $\int (\cos x - \frac{1}{2}x^2)dx$
4. $\int dx = \int 1dx = x + c$
5. $\int 0dx = 0 + c = c$
6. $f(x) = 3x^2 - 2x$; $F(x) = 1{,}5x^3 - x^2 + c$
7. $f(x) = \sin 2x + x$; $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}x^2 + c$
8. $f(x) = x \sin x$, $F(x) = ???$ schwer!
   Lösungsansatz: $F(x) = (a_0 + a_1 x)\sin x + (b_0 + b_1 x)\cos x$
   $F'(x) = f(x) = (a_0 + a_1 x)\cos x + a_1 \sin x - (b_0 + b_1 x)\cos x + b_1 \cos x$
   $= (a_1 - b_0)\sin x - b_1 x \sin x + (a_0 + b_1)\cos x + a_1 x \cos x$
   Koeffizientenvergleich: F' (x) und f
   (1) $a_1 - b_0 = 0 \qquad b_0 = 0$
   (2) $-b_1 = 1 \qquad b_1 = -1$
   (3) $a_0 + b_1 = 0 \qquad a_0 = 1$
   (4) $a_1 = 0 \qquad a_1 = 0$
   Also gilt: $F(x) = \sin x - x \cos x$

Die Schar F + c mit c besteht aus lauter Stammfunktionen von f, wenn F eine Stammfunkion ist.
**Frage: Gibt es noch andere Funktionen, deren Ableitung auch f ist?**

Beispiel:

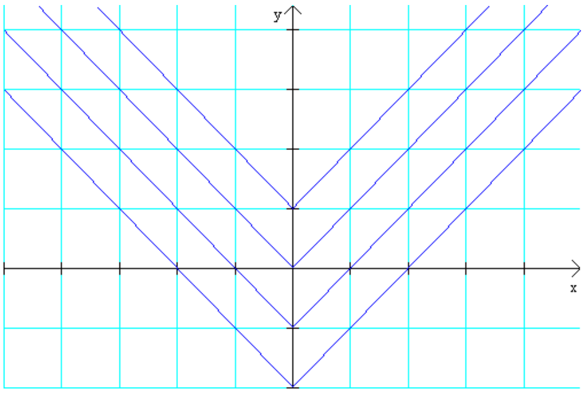
f: $x \mapsto \frac{|x|}{x}$ $D_f = \mathrm{IR} \setminus \{0\}$, also f: $x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ für } x > 0 \\ -1 \text{ für } x < 0 \end{cases}$

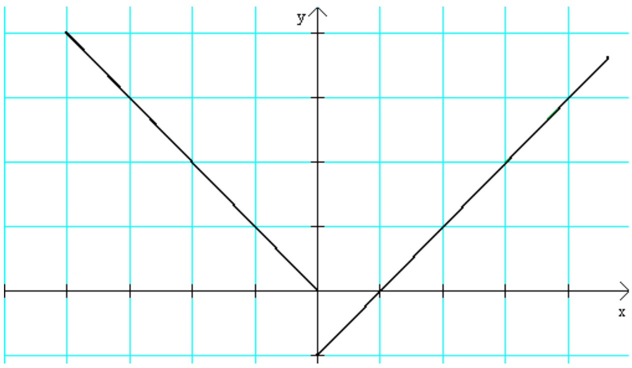
Eine Stammfunktion dazu:

F: $x \mapsto \begin{cases} x \text{ für } x > 0 \\ -x \text{ für } x < 0 \end{cases}$, d.h. F: $x \mapsto |x|$, also $F_c$: $x \mapsto |x|$, $D_f = \mathrm{IR} \setminus \{0\}$

$F_c$ ist eine Schar von Stammfunktionen, umfasst aber nicht alle möglichen Stammfunktionen, denn

F *: $x \mapsto \begin{cases} x - 1 \text{ für } x > 0 \\ -x \text{ für } x < 0 \end{cases}$ ist ebenfalls eine, denn (F*)′ = f.




Graphen beschriften: $G_{F0}$...

$F_c(x) = |x| + c$

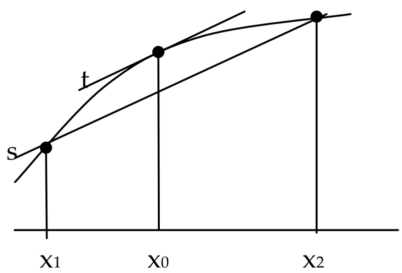
F* (x) =...

**Beachte:**
Hängt die Definitionsmenge nicht zusammen, so lassen sich die einzelnen Stücke einer Stammfunktion beliebig gegeneinander verschieben, ohne dass sich die Steigung des Graphen, d.h. die Ableitung der Stammfunktion, ändert.

**Trotzdem:**
Die neuen Stammfunktionen unterscheiden sich auf den **zusammenhängenden Teilen** von $D_f$ nur durch eine additive Konstante. (Beweis folgt)

(Wir werden uns im folgenden *(bis auf besonders herausgestellte Ausnahmefälle)* nur mit stetigen Stammfunktionen befassen.)

**Wiederholung11: Der Mittelwertsatz**




f in $[x_1; x_2]$ stetig und in $]x_1; x_2[$ diffbar, so gibt es mindestens ein $x_0$ mit $x_1 < x_0 < x_2$, so dass

$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ ist.

**oder einfach**: Es gibt mindestens ein $x_0$, so dass $m_t \mid\mid m_s$

**Satz: Ist $D_f$ eine zusammenhängende Punktmenge (Intervall) und F′ = f, so hat jede Stammfunktion G von f die Form G = F + c mit c IR.**

Beweis
Wir wählen 2 Stammfunktionen F und G von f.
Es gilt dann: F′ = f und G′ = f

Widerspr!!! **Annahme**: G ≠ F + c (wie behauptet)
Dann gilt: G – F ≠ c, dann finden wir Werte $x_1$ und $x_2$
mit (G – F) ($x_1$) ≠ (G – F) ($x_2$) *(G – F ist eine Funktion!)*
also (G – F) ($x_1$) - (G – F) ($x_2$) ≠ 0 | : ( $x_1$ – $x_2$)

$$\underbrace{(G-F)'(x_0)}_{\text{Tang.Steig. } m_t} = \underbrace{\frac{(G-F)(x_1)-(G-F)(x_2)}{x_1-x_2}}_{\text{Sekantensteigung } m_s} \neq 0$$

Mittelwertsatz mit $x_o$ $]x_1; x_2[$

$G'(x_0) - F'(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = 0$

Ergebnis: Wid.: Annahme G ≠ F + c war falsch!

**Hinweis:**
Hat man mehrere Integrale,
z. B. $\int f(x)\,dx = F(x) + c_1$
$\int g(x)\,dx = G(x) + c_2$,
so muss man manchmal die Konstanten unterscheiden, z. B. durch die Indices 1 und 2.
Es gilt dann $\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = = F(x) + G(x) + c$

## 2 *Exkurs: Die Regel von d l' Hospital*

Sind die Funktionen f und g mit f (a) = g(a) = 0 in einer gemeinsamen Umgebung von a diffbar und existiert außerdem $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, so gilt:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \text{ mit } g'(a) \neq 0.$$

Beweis:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-0}{g(a+h)-0} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}{\frac{g(a+h)-g(a)}{h}} = \frac{\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}{\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Übungsblatt 2 aus Smart