II Integralfunktion und bestimmtes Integral

Bisher: Flächenbestimmung von Rechteck, Dreieck, Kreis

F01Hippokrates

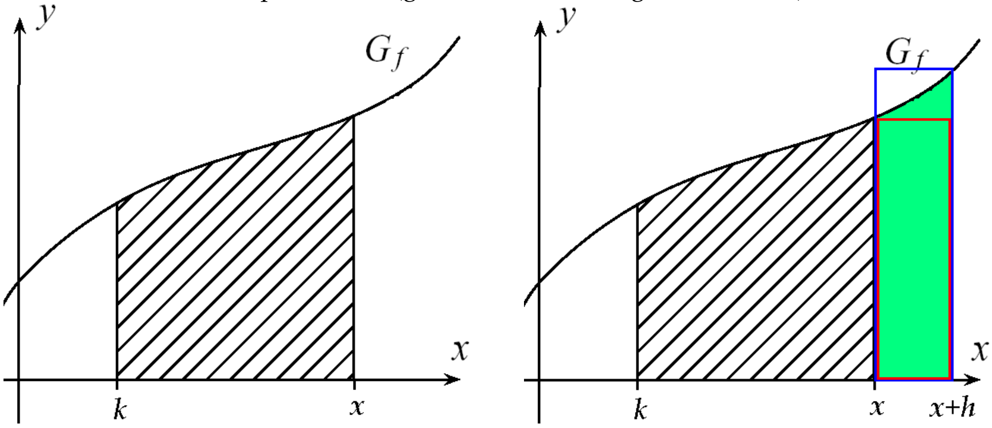
Ziel: Bestimmung von Flächeninhalten beliebig krummlinig begrenzter Flächen.

1 *Flächenfunktion*

Gegeben sei die stetige Funktion f mit (zunächst) positiven Funktionswerten.

Definition der Flächenfunktion:

Betrachte die Funktion $A_k : x \to A_k(x)$, die jedem x D_f mit $x \geq k$ die Flächenmaßzahl der Fläche von k bis x unter dem Graphen von f (gelb unterstrichen, gelb markiert!) zuordnet.



(ins Heft nur linke Zeichnung, Phase 2 später!)

Wir suchen nun einen Zusammenhang zwischen f und A_k

Annahme: A_k (x) sei bereits bekannt

In einer kleinen Umgebung von x, in der f streng monoton steigend ist, gilt:

$A_k(x+h) - A_k(x)$ ist Flächeninhalt des grünen Streifens, der von G_f begrenzt wird.

rot grün blau

Es gilt: $f(x) \cdot h \leq A_k(x+h) - A_k(x) \leq f(x+h) \cdot h$ für (auch für $h < 0$)

Hier Nebenbemerkung für $h < 0$

$f(x+h) \cdot (-h) \leq A_k(x) - A_k(x+h) \leq f(x) \cdot (-h) \mid \cdot(-1)$ für $h < 0$, also das gleiche

$$\Rightarrow f(x) \underset{\geq}{\leq} \frac{A_k(x+h) - A_k(x)}{h} \underset{\geq}{\leq} f(x+h) \quad \begin{matrix} \text{für } h > 0 \\ \text{für } h < 0 \end{matrix}$$

=>Differenzialquotient! $\lim\limits_{h \to 0} \frac{A_k(x+h) - A_k(x)}{h} = f(x)$, weil $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$ (stetig!)

Ergebnis

A_k ist in dem beliebig gewählten Punkt differenzierbar und es gilt:

$A_k'(x) = f(x)$

A_k ist eine Stammfunktion von f!

Bemerkungen:

1. Die Konstante c der Flächenfunktion (Stammfunktion!) muss noch bestimmt werden!
2. Ergebnis gilt auch, wenn f im Intervall streng monoton fallend ist. Nur bei der Herleitung ändert sich das Vorzeichen der Ungleichungskette. In konstanten Intervallen Gleichungskette!

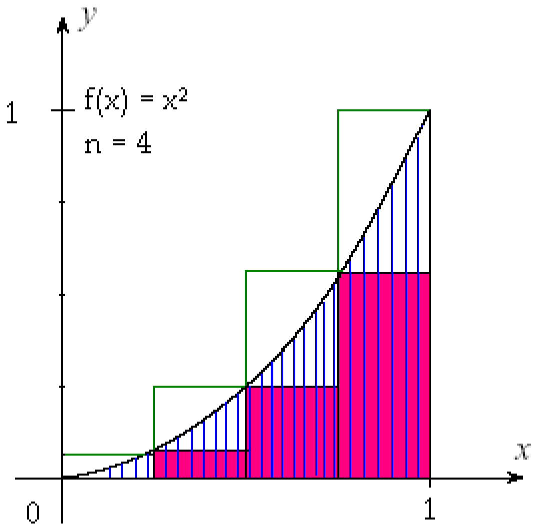
Bestimmung der additiven Konstante c:
Die Fläche von k bis k ist sicher Null: $A_k(k) = 0$

Beispiel:
$f(x) = 3x^2$; Gesucht: Fläche zwischen –1 und 1,5.
$A_{-1}(x) = x^3 + c$
Mit $A_{-1}(-1) = 0$ folgt $c = 1$, somit $A_{-1}(x) = x^3 + 1$, und die gesuchte Fläche ist 4,375.

Aufgaben 35/6 (Ha: 35f/7,8)

2 Historischer Weg (Archimedes): Streifenmethode (Abb!)

Gesucht: der zwischen $x = 0$ und $x = 1$ gelegene Flächeninhalt unter dem Graphen von $f(x) = x^2$



(Zeichnen mit n = 8, Einheit 8 Kästchen!)
(Zunächst nur Obersumme!)

Lösungsmöglichkeit:
Man teile das x-Intervall [0; 1] in n gleich große Teilintervalle, Breite je 1/n, auf (hier n = 8). Eine Näherung für die gesuchte Fläche erhält man, wenn man alle Rechtecksflächenstreifen, deren Höhe dem jeweils größten Funktionswert des Teilintervalls entspricht, zusammenzählt. Der berechnete Flächeninhalt ist dann sicher größer als der gesuchte (Obersumme)

In gleicher Weise erhält man eine „zu kleine" Näherung, wenn die Rechtecksflächen jeweils den kleinsten Funktionswerten entsprechen (Untersumme)

Für sehr große n wird man erwarten dürfen, dass bei beiden Methoden der Flächenwert sehr genau angenähert wird.

Die Rechnung ergibt allgemein (bedenke $A_{\square} = g \cdot h$ mit $g = 1/n$ für alle Rechtecke)

Obersumme:

$$\overline{S_n} = \tfrac{1}{n}\cdot(\tfrac{1}{n})^2 + \tfrac{1}{n}\cdot(\tfrac{2}{n})^2 + \ldots + \tfrac{1}{n}\cdot(\tfrac{n}{n})^2 =$$
$$= \tfrac{1}{n}\cdot[(\tfrac{1}{n})^2 + (\tfrac{2}{n})^2 + \ldots + (\tfrac{n}{n})^2] =$$
$$= \tfrac{1}{n^3}\cdot[1^2 + 2^2 + \ldots + n^2](FS!)$$
$$= \tfrac{1}{n^3}\cdot\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Untersumme:

$$\underline{S_n} = \tfrac{1}{n}\cdot(0)^2 + \tfrac{1}{n}\cdot(\tfrac{1}{n})^2 + \ldots + \tfrac{1}{n}\cdot(\tfrac{n-1}{n})^2 =$$
$$= \tfrac{1}{n}\cdot[0^2 + (\tfrac{1}{n})^2 + \ldots + (\tfrac{n-1}{n})^2] =$$
$$= \tfrac{1}{n^3}\cdot[1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2](FS!)$$
$$= \tfrac{1}{n^3}\cdot\tfrac{1}{6}(n-1)n(2(n-1)+1) = \tfrac{1}{n^3}\cdot\tfrac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$

Für jedes beliebig große n lässt sich so jeweils eine Näherung für A berechnen.

Versuch: Einen Grenzwert für $n \to \infty$ zu finden, das nämlich müsste der exakte Flächeninhalt sein!

Es ergibt sich jeweils:

$$\overline{S_n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \ldots = \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\underline{S_n} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \ldots = \frac{2n^3-3n^2+n}{6n^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Erwartungsgemäß ergibt sich in beiden Fällen der gleiche Grenzwert 1/3.
Also ist A = 1/3 [FE] (weil ja $\underline{S_n} < A < \overline{S_n}$

Feststellung:
Flächeninhalte von Flächen, die von stetigen Funktionsgraphen begrenzt werden, lassen sich – wenigstens näherungsweise – immer mit der Streifenmethode berechnen. Dazu müssen die gebildeten Rechtecksstreifen nicht einmal die gleiche Breite besitzen. Außerdem kann man als Rechteckshöhe irgendeinen Funktionswert $f(\xi_i)$ aus dem jeweiligen Intervall $[x_{i-1}; x_i]$ verwenden.

Die Fläche unter dem Graphen von f im Intervall [x_0; x_n] lässt sich damit annähern durch $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$,

Im Falle einer „unendlich feinen“ Aufteilung schreibt man dann nach Leibniz

$$\boxed{\lim_{n\to\infty, \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_{x0}^{xn} f(x)dx = \int_{x0}^{xn} f(t)dt}$$

Wir haben in II.1 und II.2 zwei Wege zur Berechnung der Fläche unter dem Graphen einer stetigen Funktion in einem Intervall [a, b] kennen gelernt. Zusammenfassend gilt:

Gleichbedeutende Schreib- und Sprechweisen

bisher	**ab sofort**
Fläche unter G_f im Intervall a bis b	bestimmtes Integral von f über [a,b]
$A_a(b)$	$\int_a^b f(t)dt$
Flächenfunktion von f	Integralfunktion von f
$A_a(x)$	$\int_a^x f(t)dt$

Unterscheide:
Das unbestimmte Integral ist eine **Menge von Funktionen**.
Das bestimmte Integral ist eine **Zahl** (Fläche!)
Die Integralfunktion ist eine **Funktion** (Stammfunktion zu f)

Es gilt wie in II.1

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + c,$$

wobei man c aus der Bedingung $\int_a^a f(t)dt = 0$ bestimmen kann => c = -F (a)

Beispiel
f (x) = x^2

A_0 (x) = $\int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3} + c$

$\int_0^0 t^2 dt = 0^3/3 + c = 0$

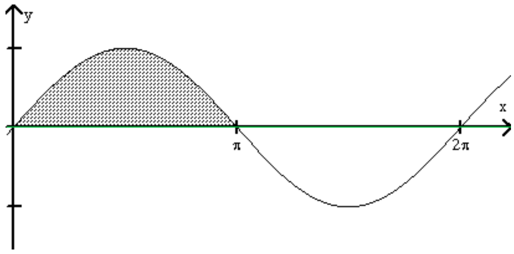
d.h. $\int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3}$

$\int_0^1 t^2 dt = \frac{1^3}{3} = \frac{1}{3}$ (Beispiel vom Arbeitsblatt!)

3 *Ermittlung von Flächeninhalten mit Hilfe von Integralfunktionen*

Aufgaben:

1) Sei f (x) = sin x. Bestimme den Flächeninhalt der Fläche unter dem Graphen im Intervall [0, π], also



$$\int_0^{\pi} \sin x dx$$

A_0 (x) = $\int_0^x \sin t dt = -\cos x + c$,

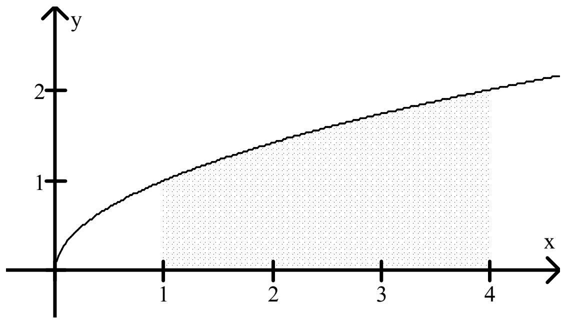
wobei $A_0(0)$ =-cos 0 + c = 0 => c = 1

=> A_0 (x) = - cos x + 1

=> A_0 (π) = -cos π + 1 = 1 + 1 = 2

2) Sei f (x) = $\sqrt{x}$. Bestimme den Flächeninhalt unter G_f im Bereich [1; 4], d. h.

A = $\int_1^4 \sqrt{x} dx$



Es gilt: A_1 (x) = $\int_1^x \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$,

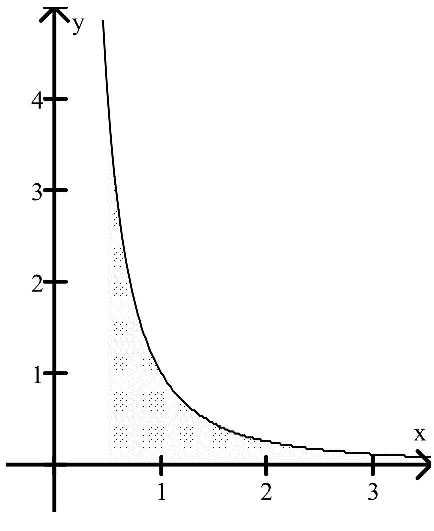
wobei A_1 (1) = 2/3 + c =0 => c = -2/3

=> A_1 (x) = $\int_1^x \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}$

=> A_1 (4) = $\frac{2}{3} 4^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} 8 - \frac{2}{3} = 4\frac{2}{3}$

3) f (x) = $\frac{1}{x^2}$. Bestimme die Fläche unter G_f von 0,5 bis 3, d. h.

A = $\int_{0,5}^3 \frac{1}{x^2} dx$



Es gilt: $A_{0,5}$ (x) = $\int_{0,5}^x \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{x} + c$,

wobei $A_{0,5}$ (0,5) = 0 => c = 2

=> $A_{0,5}$ (x) = $-\frac{1}{x} + 2$

=> $A_{0,5}$ (3) = 1 2/3

4) f (x) = sin ax. Bestimme die Fläche unter G_f in Abhängigkeit von a im Intervall [0; π/a] (a > 0), d. h.

A = $\int_0^{\pi/a} \sin ax dx$

Es gilt: A_0(x) = $\int_0^x \sin(at) dt = -\frac{1}{a} \cos at + c$,

wobei A_0 (0) = 0 => c = 1/a

=> A_0 (x) = $-\frac{1}{a} \cos(ax) + \frac{1}{a}$ => A_0(π/a) = 2/a

3.1 Vereinfachte Auswertung des Integrals $\int_a^b f(t)dt$

Sei F(x) eine beliebige Stammfunktion von f (x). Der Term der Integralfunktion $\int_a^x f(t)dt$ ist dann

$\int_a^x f(t)dt = F(x) + c$, (I) wobei man c erhält aus

F (a) + c = 0 oder
c = - F(a) (II)
Der gesuchte Flächeninhalt unter G_f über [a, b] ist nach (I) und (II)

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)}$$

Vorteil:
Man spart sich den Zwischenschritt der Bestimmung der Konstanten!

Bsp: Vereinfachte Lösung der Aufgaben aus 3.:

1. $\int_0^\pi \sin x dx = -\cos \pi + \cos 0 = 2$ mit F (x) = -cos x

   $\int_0^\pi \sin x dx = -\cos\pi - 1 + \cos 0 + 1 = 2$ mit F (x) = -cos x + 1, egal welche Stammfkt. da sich die Konstante weghebt.

2. $\int_1^4 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\cdot 1^{\frac{3}{2}} = 4\frac{2}{3}$ $(F(x) = \frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}})$

3. $\int_{0,5}^3 \frac{1}{x^2}dx = -1/3 - (-1/0,5) = 1\ 2/3$ (F (x) = -1/x)

usw.

Formale Schreibweise

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Bsp:

3. $\int_{0,5}^3 \frac{1}{t^2}dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_{0,5}^3 = \ldots 1\frac{2}{3}$

4. $\int_{-1}^2 4 - t^2 dt = \left[4t - \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^2 = 4\cdot 2 - \frac{2^3}{3} - (-4 + \frac{1}{3}) = 9$

5. $\int_a^b t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$

6. $\int_{-1}^1 3t^2 + 2|t|dt = \int_{-1}^0 3t^2 - 2tdt + \int_0^1 3t^2 + 2tdt = [x^3 - x^2]_{-1}^0 + [x^3 - x^2]_0^1 = 0 - (-1 - 1) + 1 + 1 - 0 = 4$

3.2 Anwendungen der Integration

a Beschleunigte Bewegung: Freier Fall

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \dot{x}(t) \qquad x(t) = \int_0^t v(\tau)\, d\tau$$

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \dot{v}(t) \qquad v(t) = \int_0^t a(\tau)\, d\tau$$

Freier Fall mit v_0 und x_0, pos. x-Achse nach unten:

$a = g$

$$\Rightarrow v(t) = \int_0^t g\, d\tau = gt + v_0$$

$$\Rightarrow x(t) = \int_0^t g\tau + v_0\, d\tau = \tfrac{1}{2} gt^2 + v_0 t + x_0$$

b Arbeit

$W = F \cdot s$ (falls $F \parallel s$ und F nicht von s abhängig!)

Sonst: Bei kleiner Änderung von s bleibt F (s) praktisch konstant:

$dW = F(s)\, ds$

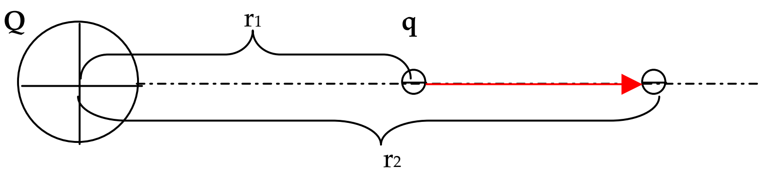
Beispiel 1: Dehnung eines Gummibandes

$F(x) = D \cdot x$

Dehnung aus der Ruhelage 0 um s:

$$W = \int_0^s F(x)dx = \int_0^s Dxdx = D\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^s = \frac{1}{2} Ds^2$$

Beispiel 2: Ladungstransport



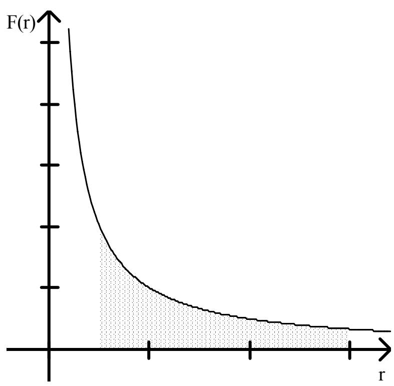
Die negative Elementarladung soll die negative Ladung q von r_1 nach r_2 gegen die Anziehungskraft der mit Q geladenen Kugel transportiert werden.

Anziehungskraft nach Coulombgesetz:

$$F(r) = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{k}{r^2}$$

$$W_{r1,r2} = \int_{r1}^{r2} F(r)dr = \int_{r1}^{r2} \frac{k}{r^2} dr = \left[-\frac{k}{r}\right]_{r1}^{r2} = \frac{k}{r_1} - \frac{k}{r_2}$$

Entsprechende Ergebnisse erhält man für die Hubarbeit im Gravitationsfeld mit $k = Gm_1m_2$, wobei G die Newtonsche Gravitationskonstante ist.



Randbemerkung: Um einen Körper ganz aus dem Gravitationsfeld der Sonne zu entfernen „und in die Unendlichkeit des Weltalls zu schicken", genügt somit die endliche Energie

$$W_{r1,\infty} = \lim_{r2 \to \infty}\left(\frac{k}{r_1} - \frac{k}{r_2}\right) = \frac{k}{r_1}$$

Die Arbeit entspricht der Fläche im r-F-Diagramm!

c Volumenberechnung bei Rotationskörpern

Eine Kurve rotiert um eine Achse und erzeugt einen Körper, dessen Querschnittsflächen konzentrische Kreise sind.

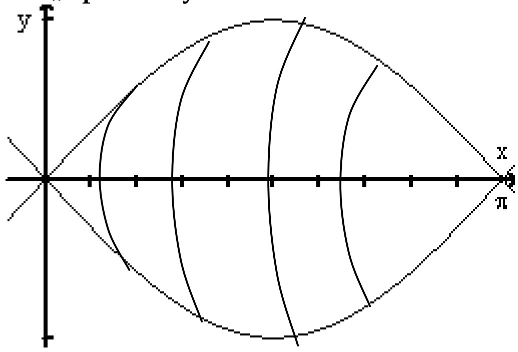
Herleitung einer Formel zur Volumenberechung: siehe Arbeitsblatt.

Allgemein gilt für das Volumen: $\boxed{V = \int_{x\,min}^{x\,max} f^2(x)\pi dx = \int_{x\,min}^{x\,max} A(x)dx}$

Dabei ist A die Querschnittfläche.

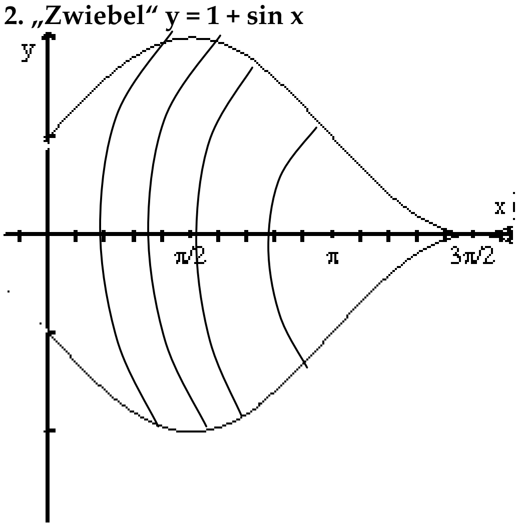
Beispiele:

1) „Spindel“ y = sin x



V = $\pi\int_0^{\pi}(\sin x)^2dx = \pi\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi} = \pi\left[\frac{\pi}{2} - 0\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\pi^2$

2. „Zwiebel“ y = 1 + sin x



Schüler rechnen lassen, Prinzip wie oben, ausquadrieren, Ergebnis: $2\pi + \frac{9}{4}\pi^2$

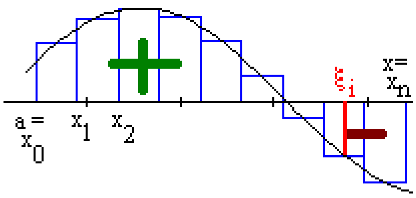
4 *Integralfunktion beliebiger stetiger Funktionen – Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung*

Bisher: $A_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ nur für positive stetige Funktionen mit Werten x ≥ a.

Nun zwei Verallgemeinerungen:

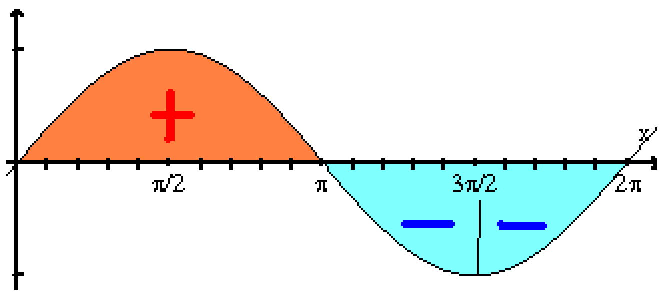
1. Verallgemeinerung:
f (x) beliebig stetig, x ≥ a. Auch hier soll definiert werden:

$$\int_a^{x_n} f(x)dx = \lim_{n\to\infty, \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$



Aufgrund der Definition wird die Fläche im negativen Bereich von f auch negativ gezählt (neg. Rechteckshöhe f (ξ_i)!). Es handelt sich nunmehr nicht um eine Flächenfunktion, sondern um eine **Flächenbilanzfunktion.** Positiv und negativ gewertete Flächen werden gegeneinander aufgerechnet. Auch in dieser erweiterten Form sind Integralfunktionen Stammfunktionen der Ursprungsfunktion (Beweis wie in II.1).

Beispiele:
1. f (x) = sin x

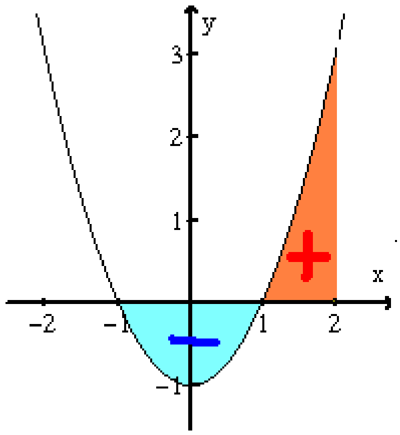


Es gilt:

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 2$$

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin x dx &= [-\cos x]_0^{\frac{3}{2}\pi} = -\cos\frac{3}{2}\pi + \cos 0 = 1 \\ \int_0^{2\pi} \sin x dx &= [-\cos x]_0^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos 0 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Flächenbilanz}$$

2. f (x) = x² - 1



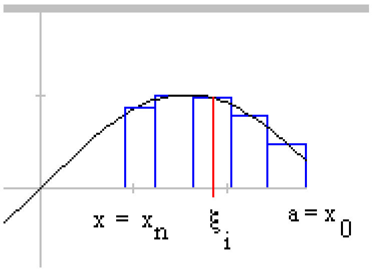
$$\int_{-1}^{1} x^2 - 1dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - 1 - (\frac{-1}{3} + 1) = -1\frac{1}{3}$$

$$\int_{-1}^{2} x^2 - 1dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{2} = \frac{8}{3} - 2 - (\frac{-1}{3} + 1) = 0$$ **Flächenbilanz**

2. Verallgemeinerung:

f (x) beliebig stetig, $x_n < a$. Auch hier soll definiert werden:

$$\int_{a}^{xn} f(x)dx = \lim_{n->\infty, \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$



Da weiter $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ gelten soll, sind alle Δx_i negativ. Für positive $f(\xi_i)$ erhält man also negative Flächenanteile, für negative $f(\xi_i)$ entsprechend positive Flächenanteile.

Auch für diese Definitionserweiterung der Integralfunktion erhält man

$$\frac{d}{dx}\int_{a}^{x} f(t)dt = f(x)$$

Zum Beweis könnte man die Überlegungen aus Abschnitt II.1 auf die Funktion g (x) = f(-x) anwenden:

Wegen x < a ist –x > -a und für $\int_{-a}^{-x} g(t)dt$ gilt alles dort gesagte (falls g (x) > 0).

Da $\int_{a}^{x} \underbrace{f(t)}_{>0}\underbrace{dt}_{<0} = -\int_{-a}^{-x} \underbrace{g(t)}_{>0}\underbrace{dt}_{>0}$ (Die Differentiale besitzen in beiden Integralen unterschiedliches Vorzeichen) gilt:

$$\frac{d}{dx}\int_{a}^{x} f(t)dt = \underbrace{\frac{d}{dx}\left(-\int_{-a}^{-x} g(t)dt\right)}_{\frac{d}{dx}(-G(-x)) = -g(-x)\cdot(-1) \text{ falls G Stammfkt. von g}} = -g(-x)\cdot(-1) = g(-x) = f(x)$$

(Eine graphische Erläuterung dieses Beweises existiert nur im tatsächlichen Skript!)

Zusammenfassend lässt sich nun für II.1 und II.4 der folgende wichtige Satz formulieren:

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung:

f sei auf dem Intervall I stetig. F sei Integralfunktion zu f mit

$F : x \to \int_k^x f(t)dt$ mit k I und $D_F = I$

Dann gilt: $F'(x) = \int_k^x f(t)dt = f(x)$ (x I)

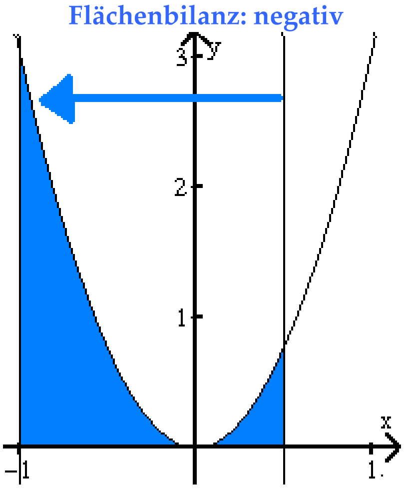
Anders: Die Ableitung der Integralfunktion einer stetigen Integrandenfunktion ist der Integrand selbst.

Beispiel für die Flächenberechnung, die sich aus den beiden Verallgemeinerungen ergibt

Funktion: positiv; Integrationsrichtung: negativ

$$\int_{1/2}^{-1} 3t^2dt = [t^3]_{1/2}^{-1} = -1-\frac{1}{8} = -\frac{9}{8}$$

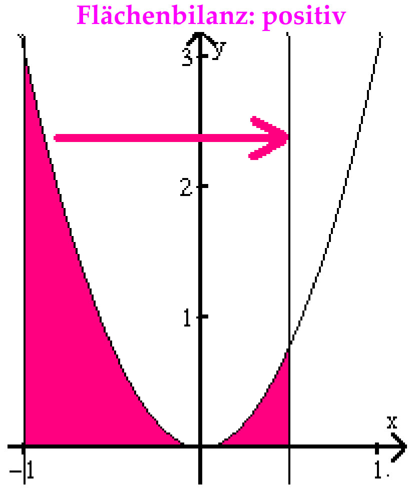
Flächenbilanz: negativ



Funktion: positiv; Integrationsrichtung: positiv

$$\int_{-1}^{1/2} 3t^2dt = [t^3]_{-1}^{1/2} = \frac{1}{8}-(-1) = \frac{9}{8}$$

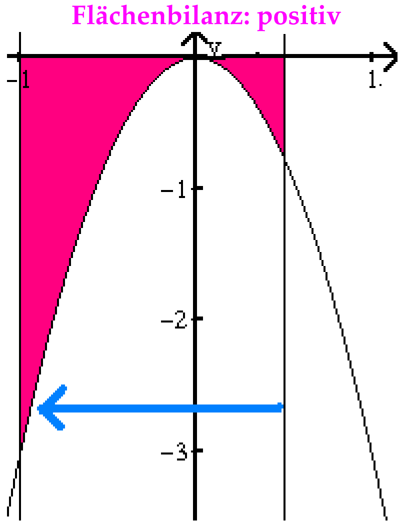
Flächenbilanz: positiv



Funktion: negativ; Integrationsrichtung: negativ

$$\int_{1/2}^{-1} -3t^2dt = [-t^3]_{1/2}^{-1} = 1-\left(-\frac{1}{8}\right) = +\frac{9}{8}$$

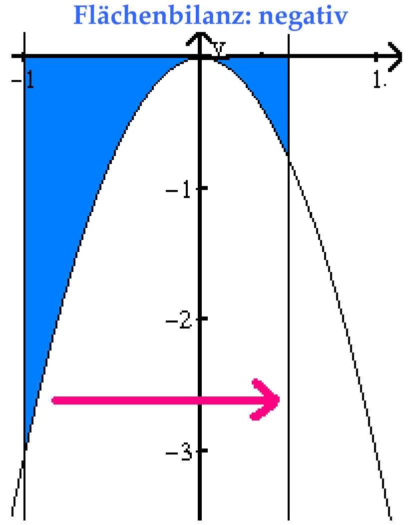
Flächenbilanz: positiv



Funktion: negativ; Integrationsrichtung: positiv

$$\int_{-1}^{1/2} -3t^2dt = [-t^3]_{-1}^{1/2} = \left(-\frac{1}{8}-(-(-1)^3)\right) = -\frac{9}{8}$$

Flächenbilanz: negativ



5 *Eigenschaften der Integralfunktion; Rechenregeln*

5.1 Ermittlung des ungefähren Verlaufs des Graphen der Integralfunktion

- Mit der Kenntnis von f (x) kennt man das Steigungsverhalten jeder Stammfunktion
- An der unteren Integrationsgrenze liegt eine Nullstelle der Integralfunktion

Beispiel: F (x) = $\int_{-1}^{x} t^2 - 4dt$

Es gilt:

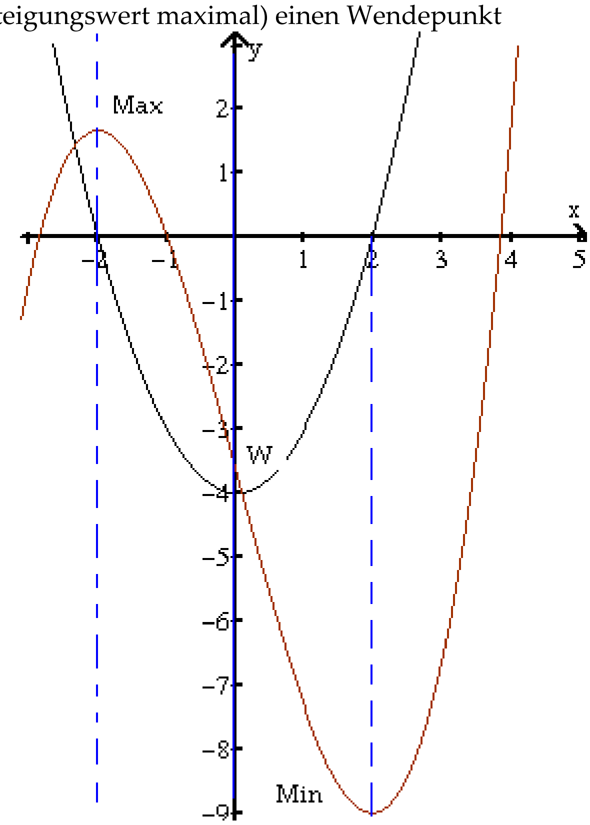
- F (-1) = 0
- F (x) ist streng monoton fallend für x]-2; 2[
- F (x) ist streng monoton steigend für x \ [-2;2]
- 

  -2 0 2

  Max Min

  F (x) hat bei x = -2 ein Maximum

  bei x = 2 ein Minimum
- F hat bei x = 0 (neg. Steigungswert maximal) einen Wendepunkt



Einen **genauen** Verlauf kann man erst nach Berechnung der y-Werte erkennen:

F (x) =$x^3/3$-4x+ 1/3 –4

F (2) = -9

F (-2) = 5/3

5.2 Integral- und Stammfunktionen

Die Menge der Integralfunktionen einer Funktion f ist nicht in jedem Fall mit der Menge der Stammfunktionen identisch.

Beispiele:

a) $f(x) = 2x$; $F(x) = x^2 + 1$ ist keine Integralfunktion, weil F keine Nullstelle hat.

b) $f(x) = x^2$; $F(x) = \frac{x^3}{3} + c$ sind Integralfunktionen, weil jedes F Nullstellen besitzt.

Gib die Integralschreibweise von $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2$ an!

$\frac{x^3}{3} + 2 = 0 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{6}$, also $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2 = \int_{-\sqrt[3]{6}}^{x} t^2 dt$

c) $f(x) = x^2 + x$; $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$ ist Integralfunktion. Gib F in Integralschreibweise an.

$\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2(2x+3) = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = 0$, $x_3 = -1{,}5$

$\int_0^x t^2 + t dt$ oder $\int_{-1{,}5}^x t^2 + t dt$

Ergebnis

Die Menge der Integralfunktionen ist eine Teilmenge der Menge der Stammfunktionen.

5.3 Rechenregeln

Die Rechenregeln für Stammfunktionen aus I.1. lassen sich nach II.1 auf Integralfunktionen und deshalb auch auf bestimmte Integrale übertragen.
Alle Regeln gelten auch für festes x = b

(1) $\int_a^x kf(t)dt = k\int_a^x f(t)dt$

(2) $\int_a^x f(t) \pm g(t)dt = \int_a^x f(t)dt \pm \int_a^x g(t)dt$

(Skizzen!)

NachII.4:

(3) $\int_a^x f\,(t)dt = -\int_x^a f\,(t)dt$

(4) $\int_a^a f\ \ (t)dt = 0$

Sei f in einem Intervall I integrierbar. Damit gilt für beliebige a,b,c $\in$ I:

(5) $\int_a^c f\,(t)dt + \int_c^x f\,(t)dt = \int_a^x f\,(t)dt$

Beweis:
Für a < c < x: trivial

Für c < a < x gilt: $\int_c^x f\ \ (t)dt = \int_c^a f\,(t)dt + \int_a^x f\,(t)dt$

$\Leftrightarrow\quad -\int_c^a f\,(t)dt \int_c^x f\ \ (t)dt = \int_a^x f\,(t)dt$

$\Leftrightarrow\quad -\int_a^c f\,(t)dt + \int_c^x f\ \ (t)dt = \int_a^x f\,(t)dt$

Für a < c < b : analog

Beispiele
1. Betrachte $f(x) = 2 - x^2$
Gesucht: Flächeninhalt (nicht: Flächenbilanz!) der Fläche zwischen dem Graph von f und der x-Achse zwischen x = 1 und x = 2
Warum nicht einfach Integral zwischen 1 und 2?
Erst Zeichnen!

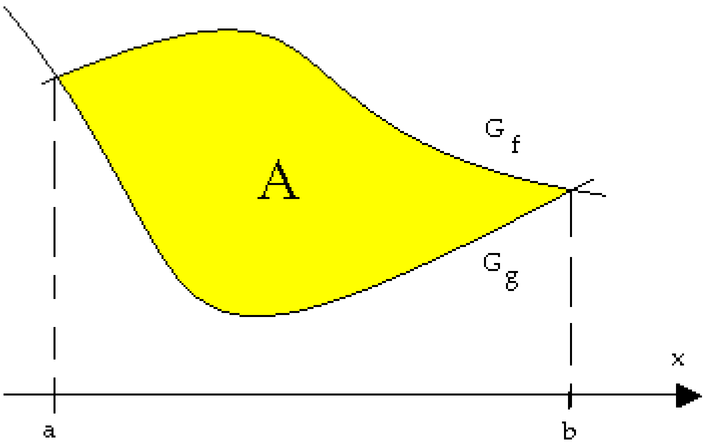
$$A = -\int_1^{\sqrt{2}}(2-x^2)dx + \int_{\sqrt{2}}^2(2-x^2)dx =$$

2. Betrachte $f_k(x) = k - x^2$ (k>0)
Für welches k schließt der Graph von f_k ein Flächenstück der Größe 2 FE ein?

$$2 = A_k = \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}}(k-x^2)dx$$

Fläche zwischen zwei Graphen

$A = \int_a^b f(x) - g(x)dx$



Beispiel: $f(x) = 2 - x^2$ $g(x) = x^2 - 2x - 2$
Ergebnis: $A = 9$

Variation der Integrationsgrenzen

Sei $H(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt$

Dann folgt durch direktes Einsetzen

$$\boxed{H(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt = F(g(x)) + c}$$

Weiter folgt:
$H'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$

Beispiele:

1. $H(x) = \int_1^{x^2} 2t^2 - tdt = \left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{t^2}{2}\right]_1^{x^2} = \frac{2}{3}x^6 - \frac{x^4}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}x^6 - \frac{x^4}{2} - \frac{1}{6}$

   $H'(x) = (2(x^2)^2 + x^2) \cdot 2x = 4x^5 - 2x^3$

2. $\frac{d}{dx}\int_x^a f(t)dt = -f(x)$

   $\frac{d}{dx}\int_a^{-x} f(t)dt \overset{\text{nachdiff.}}{=} -f(-x)$

   $\frac{d}{dx}\int_{-x}^a f(t)dt = -(-f(-x)) = f(-x)$

3. $f(x) = \sin(x^2) \cdot x$
   Ges: Stammfunktion
   $f(x) = ½(\sin(x^2) \cdot 2x)$
   => $F(x) = ½\cos x$