III Die Exponentialfunktion

1 Wiederholung

a Potenzfunktionen

$f : x \rightarrow x^k$ mit k

beachte: $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

$x^{\frac{3}{2}} = \sqrt[3]{x^2}$

$x^{-1} = \frac{1}{x}$ u. s. w.

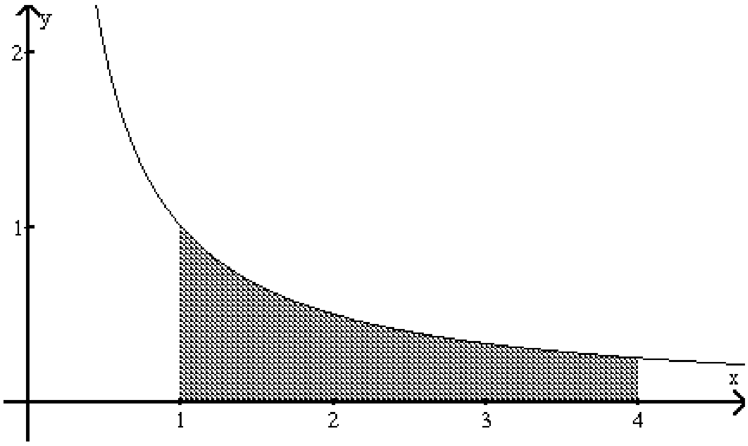
$D_f =$ für k $_0$

$D_f =$ \{0} für k

$D_f =$ $_0^+$ für k $^+$\

$D_f =$ $^+$ für k $^-$\ $^-$

Problem:



In I.1., Integrationsregel 2 (f (x) = x^r $\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + c$) existiert die Ausnahme r \{-1}. Wie lässt sich dann die folgende Aufgabe lösen?

f (x) = 1/x. Bestimme den Flächeninhalt unter G_f von 1 bis 4, also $\int_1^4 \frac{1}{x} dx$!

Würde Regel 2 gelten, so ergäbe sich:

$\int_1^4 \frac{1}{x} dx = \frac{x^{-1+1}}{-1+1} + c$, geht nicht!

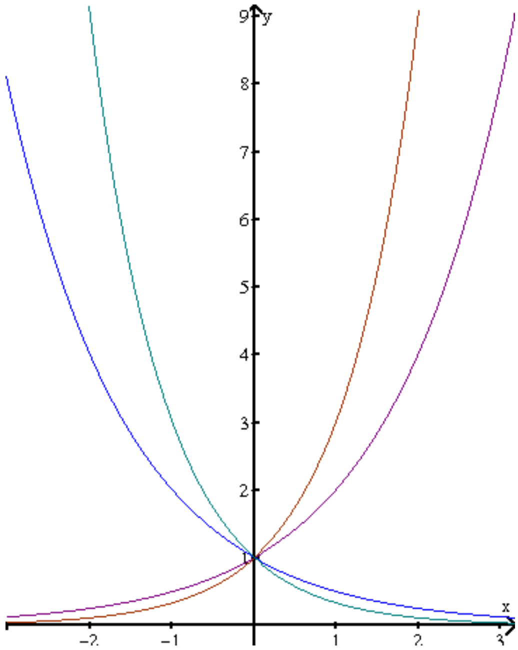
Im weiteren Verlauf des Kurses wird der Logarithmus zur Lösung dieses Problems beitragen

b Exponentialfunktionen

Einführung: Folie: Verzinsung und radioaktiver Zerfall

f: $x \rightarrow a^x$ mit a $\quad ^{+}\setminus\{1\}$

Graphische Darstellung für $y = 2^x$, $y = 3^x$ $y = \frac{1}{2}^x$ $y = \frac{1}{3}^x$



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2^x$	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8
$y = 3^x$	1/27	1/9	1/3	1	3	9	27
$y = \frac{1}{2}^x$	8	4	2	1	1/2	1/4	1/8
$y = \frac{1}{3}^x$	27	9	3	1	1/3	1/9	1/27

Allgemeine Eigenschaften

1. $D_{max} =$
2. $W_{max} = \quad ^{+}$
3. $f(0) = 1$
4. $a > 1$ => f (x) streng monoton steigend
   $0 < a < 1$ => f (x) streng monoton fallend
5. $a > 1$ $x \rightarrow +\infty: y \rightarrow +\infty$
   $x \rightarrow -\infty: y \rightarrow 0$
   $0 < a < 1$ $x \rightarrow +\infty: y \rightarrow 0$
   $x \rightarrow -\infty: y \rightarrow +\infty$

Rechengesetze für Potenzrechnung

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$a^0 = 1$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Aufgaben S. 111, insbesondere 4 und 5

2 Auf der Jagd nach einer besonderen Funktion

Die Ableitung der Exponentialfunktion

Der Differenzialquotient ergibt

$$(b^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{b^{x+h} - b^x}{h} = \lim_{h\to 0} b^x \frac{b^h - 1}{h} = b^x \lim_{h\to 0} \frac{b^h - 1}{h}.$$

In der Ableitung von b^x steht also wieder b^x, der Grenzwert ist unabhängig von x!

Wenn es nun gelingt, ein b zu finden, für das der Grenzwert den Wert 1 annimmt, hätten wir eine Funktion, deren Ableitung wieder die Funktion selbst ist.

Der Wunsch wäre also $\lim_{h\to 0} \frac{b^h - 1}{h} = 1$

Für sehr kleine h soll also gelten:

$$\frac{b^h - 1}{h} \approx 1$$

$$\Leftrightarrow b^h - 1 \approx h$$

$$\Leftrightarrow b^h \approx h + 1$$

$$\Leftrightarrow b \approx (h+1)^{\frac{1}{h}}$$

Mit Hilfe der Tabellenkalkulation (->eFunktion.xls) lassen wir nun h die Wanderung gegen 0 antreten.

h	$(h+1)^{\frac{1}{h}}$
10	1,270981615
5	1,430969081
2,5	1,650544424
...	...
1,8626E-08	2,718281803
9,3132E-09	2,718281816
4,6566E-09	2,718281822
2,3283E-09	2,718281825
1,1642E-09	2,718281827
5,8208E-10	2,718281828
2,9104E-10	2,718281828
1,4552E-10	2,718281828
7,276E-11	2,718281828
3,638E-11	2,718281828
...	...
4,4409E-15	2,718281828
2,2204E-15	2,718281828
1,1102E-15	2,718281828
...	...

Ergebnis:

1. Als Grenzwert $\lim_{h\to 0}(h+1)^{\frac{1}{h}}$ ergibt sich die Zahl e := 2,718281828... , die man Eulersche Zahl nennt.
2. Die Funktion exp: x -> e^x reproduziert sich beim Ableiten.

Mitteilung:

Die Zahl e ist irrational und transzendent.

3 Diskussion der exp-Funktion

exp: $x \to e^x$

Für Definitionsmenge, Wertemenge, Nullstellen, Schnitt mit x-Achse Vergleich mit den Funktionen 2^X und 3^X

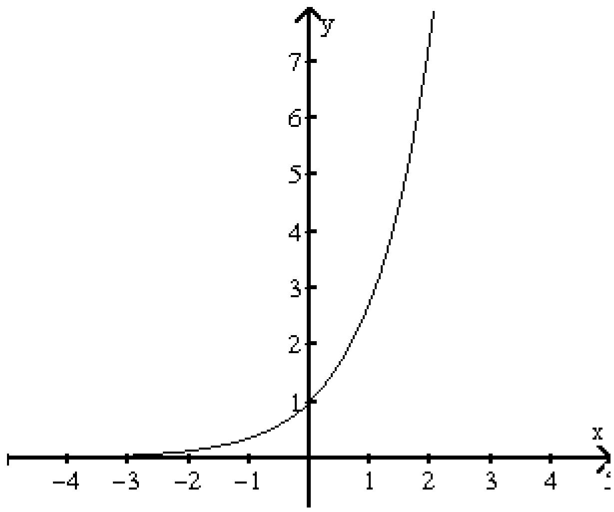
Definitionsmenge:
D = IR
Wertemenge:
W = IR⁺
Symmetrie:
Es gilt $\exp(-x) \neq \exp(x)$ und $\exp(-x) \neq -\exp(x)$
=> Weder achsensymmetrisch zur y –Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung.
Nullstellen:
keine, siehe Wertemenge
Schnitt mit der x-Achse:
exp (0) = 1
Extrema:
Da $\exp(x)' = \exp(x) > 0$ gibt es keine Punkte mit waagrechter Tangente
Monotonie:
Da $\exp(x)' = \exp(x) > 0$ ist exp auf IR streng monoton steigend.
Krümmungsverhalten:
Da $\exp(x)'' = \exp(x) > 0$ ist exp stets linksgekrümmt => keine Wendepunkte
Verhalten im Unendlichen:
$\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = +\infty$
Zur Integration:
Es gilt: unbestimmtes Integral $\int e^x dx = e^x + C$

Beispiel zur Integration:

$$\int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} e^x dx = \lim_{a\to-\infty} \left[e^x\right]_a^0 = \lim_{a\to-\infty} (e^0 - e^a) = 1$$

Wertetabelle und Graph:

x	y
-3.00000	0.04979
-2.00000	0.13534
-1.00000	0.36788
0.00000	1.00000
1.00000	2.71828
2.00000	7.38906
3.00000	20.08554



4 Funktionen vom Typ $f(x) = e^{u(x)}$

a Grundsätzliches

- Monotonieverhalten und Extrema

Funktionen der Form $g: x \rightarrow e^{u(x)}$ entsprechen in ihrem Monotonieverhalten dem Verhalten der Exponentenfunktion u (x).
Wächst u (x), so auch $e^{u(x)}$,
fällt u (x), so auch $e^{u(x)}$.
=> $x \rightarrow u(x)$ und $x \rightarrow e^{u(x)}$ besitzen die gleichen Abszissenwerte für die Extrema.

$g(x) = e^{u(x)}$; $g'(x) = u'(x)\, e^{u(x)} \stackrel{!}{=} 0 \;\Leftrightarrow\; u'(x) = 0$, da $e^{u(x)} \neq 0$

- Krümmungsverhalten

Das Krümmungsverhalten von $e^{u(x)}$ und u(x) unterscheiden sich, da
$g(x) = e^{u(x)}$;
$g'(x) = u'(x)\, e^{u(x)}$;
$g''(x) = u''(x)\, e^{u(x)} + (u'(x))^2\, e^{u(x)} = [u''(x) + (u'(x))^2]\, e^{u(x)}$

b Beispiel

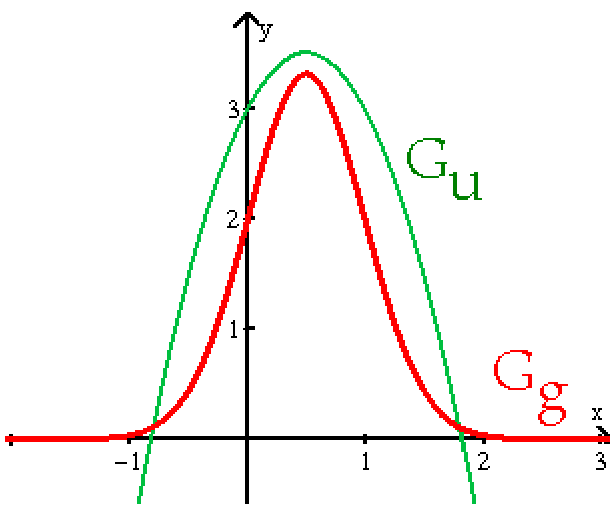
$g: x \rightarrow 0{,}1\, e^{-2x^2+2x+3}$; D = IR
Gesucht: Nullstellen, Extrema, WeP, Grenzwerte, G_u, G_g

Nullstellen
g(x) = 0 nie erfüllt, also keine Nullstellen

Ableitungen
$g'(x) \quad = 0{,}1 \cdot (-4x+2)\, e^{-2x^2+2x+3}$
$g''(x) \quad = 0{,}1\, [-4 + (-4x+2)^2]\, e^{-2x^2+2x+3} = 0{,}1\, [16x^2 - 16x]\, e^{-2x^2+2x+3}$

Extrema
$g'(x) = 0$ wenn $-4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = ½$
$g(½) = 0{,}1\, e^{3,5}$
$g''(½) = 0{,}1\,(4 - 8)\, e^{3,5} < 0$, also Max $(½;\, 0{,}1\, e^{3,5})$

Wendepunkte
$16x^2 - 16x = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0,\ x_3 = 1$
Das Rechnen mit der 3. Ableitung wird mühsam, deshalb bevorzuge ich hier die Vorzeichenwechseluntersuchung der 2. Ableitung
$g''(x) = 0{,}1 \cdot 16\,x\,[x-1]\, e^{-2x^2+2x+3}$ wechselt das Vorzeichen bei $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$
$g(0) = 0{,}1\, e^3 \Rightarrow W_1\,(0|0{,}1e^3)$
$g(1) = 0{,}1\, e^3 \Rightarrow W_2\,(1|0{,}1e^3)$



Grenzwerte
$\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} e^{-2x^2+2x+3} = ("e^{-\infty}") = 0$
$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x^2+2x+3} = ("e^{-\infty}") = 0$