IV Umkehrfunktion

1 Umkehrbarkeit

10. Klasse: Logarithmusfunktionen sind die Umkehrungen der Exponentialfunktionen. Umkehrungen beschreiben umgekehrte Zuordnungen.

f	f^{-1}
1 -> 2	2 -> 1
2 -> -1	-1 -> 2
4 -> 1	1 -> 4

Graphen zeichnen mit verschiedenen Farben.

Die x- und y-Werte vertauschen ihre Stellung, die Graphen liegen symmetrisch zur Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten.

Zwei Kriterien für Umkehrbarkeit
sin x zeichnen, spiegeln, erkennen, dass die Umkehrabbildung keine Funktion ist.

Notwendig und hinreichendes Kriterium
Eine Funktion ist genau dann umkehrbar, wenn nicht nur zu jedem x-Wert ein y-Wert existiert (das ist bei jeder Funktion so!), sondern auch zu jedem y-Wert ein x-Wert.
Hinreichend, aber nicht notwendig
Eine streng monotone Funktion ist immer umkehrbar.

Am Beispiel:

(1) f: $x \to x^2$; $D_f =\ ^-$; $W_f =\ ^+$

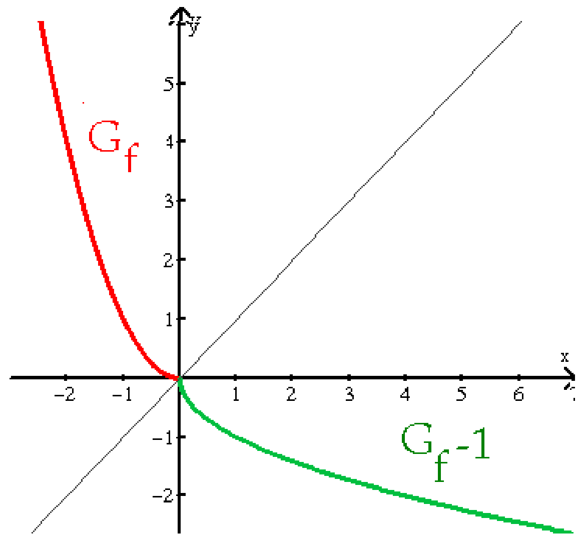
f^{-1}: $x \to$ Wurzel x; $D_{f-1} =\ ^+$; $W_{f-1} =\ ^-$

Wie findet man f^{-1}?

D und W werden vertauscht.

Funktionsterm: In der Funktionsgleichung von f vertauscht man x und y und löst danach nach y auf.

Hier: aus $y = x^2$ wird $x = y^2$ mit den Möglichkeiten $y = \pm\sqrt{x}$; in unserem Fall ist „-" zu wählen. Kein f^{-1}, wenn hier $D_f =$.

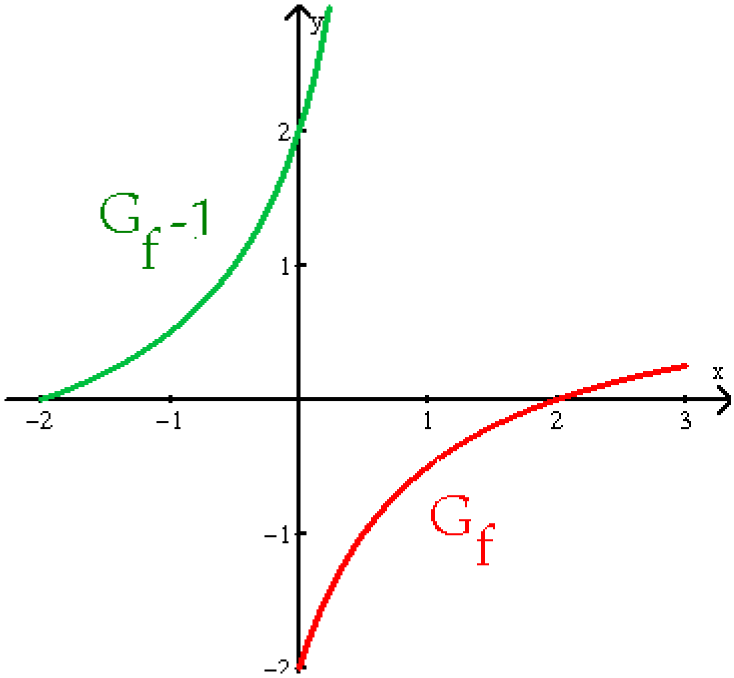


(2) f: x -> $\frac{x-2}{x+1}$; D_f = [0; 3]; W_f = [-2; 0,25] (f ist streng monoton im Intervall, wie man aus der Ableitung $\frac{(x+1)-(x-2)}{(x+1)^2} > 0$ und der Stetigkeit schließen kann) .

D_{f-1} = [-2; 0,25]; W_{f-1} = [0; 3]

Mit $y = \frac{x-2}{x+1}$ wird $x = \frac{y-2}{y+1}$ und umgeformt $y = \frac{x+2}{1-x}$

f^{-1}: x -> $\frac{x+2}{1-x}$ (x + 2)/(1 – x)



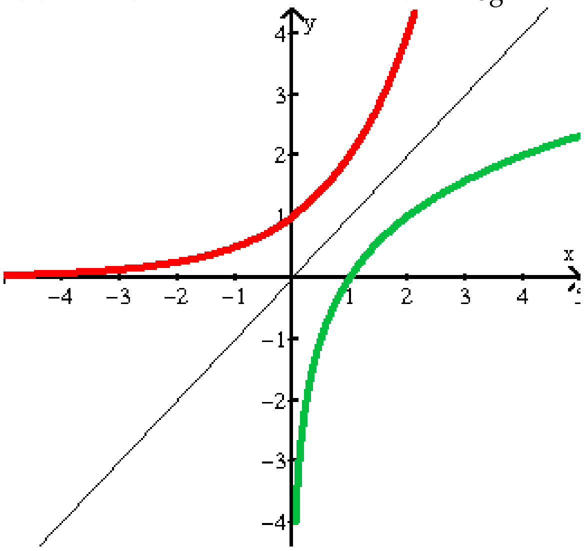
Aufgaben S. 126

2 *Logarithmusfunktion als Umkehrung der Exponentialfunktion*

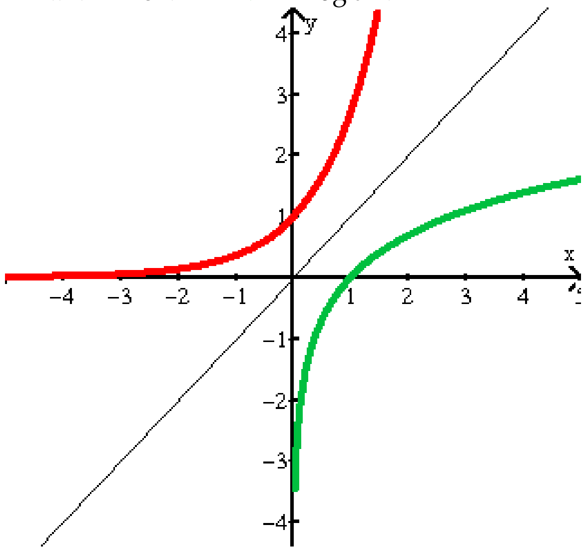
Aufgrund ihrer strengen Monotonie ist jede Exponentialfunktion umkehrbar.

Beispiele:

1. f: x -> 2^x . f^{-1}: x -> $\log_2 x$



2.. f: x -> e^x . f^{-1}: x -> $\log_e x$:= ln x



Definition: Logarithmus von x zur Basis b:

1. $\boxed{x = b^y \Leftrightarrow y = \log_b x}$

   Für $x \in IR^+$ und $b \in IR^+ \setminus \{1\}$ ist der Logarithmus $\log_b x$ zur Basis b diejenige Hochzahl, mit der man b potenzieren muss, um x zu erhalten.

2. Der Logarithmus von x zur Basis e heißt **natürlicher Logarithmus ln x.**

Beispiele für das Rechnen mit Logarithmen:

$\log_3 9 = 2$ $\log_7 1 = 0$ $\log_b\left(\frac{1}{\sqrt[4]{b}}\right) = -\frac{1}{4}$ $\log_2(-2)$ n. def

$\log_2 \frac{1}{16} = -4$ $\log_5 0{,}05 = -2$

$\log_8 0{,}25 = -2/3$, weil $8^k = 0{,}25 \Leftrightarrow 2^{3k} = 2^{-2} \Rightarrow 3k = -2 \Rightarrow k = -2/3$

Eine Besonderheit

$$\left.\begin{array}{l} a^x = b \\ x = \log_a b \end{array}\right\} \quad \boxed{\Rightarrow a^{\log_a b} = b}$$

z.B. $2^{\log_2 5} = 5$

logisch: Wenn man 2 mit dem Exponenten, mit dem man 2 potenzieren muss, um 5 zu erhalten, wirklich potenziert, erhält man natürlich 5.

3 Nachtrag zu III: Ableitung der allgemeinen Exponentialfunktion

Mit 2. ist es nun möglich, die Ableitung einer beliebigen Exponentialfunktion zu bestimmen. Nach den vorhergehenden Betrachtungen gilt z.B.

$$5^x = \left(2^{\log_2 5}\right)^x$$

Mit dem Ansatz

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{(\ln a)x}$$

folgt für die Ableitung der Funktion f: $x \to a^x$

$f'(x) = e^{x \ln a} \cdot \ln a$ (Kettenregel) $= a^x \cdot \ln a$

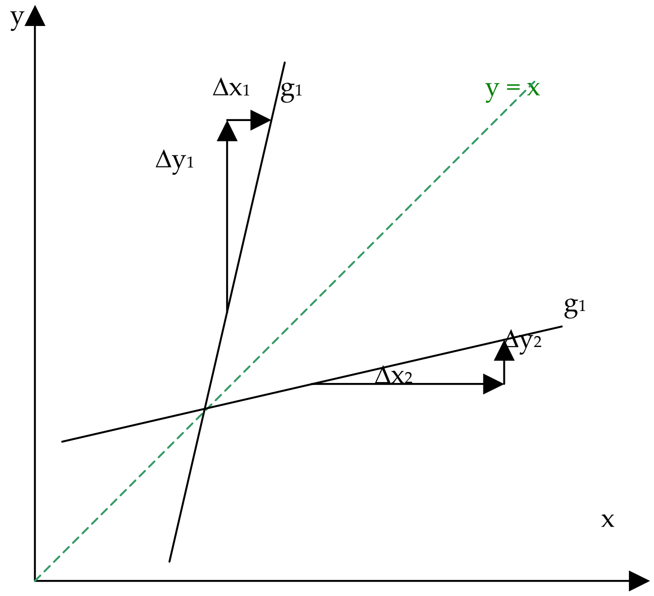
Zusammenfassung der Ableitungsregeln für Exponentialfunktionen:

f(x) =		f′ (x) =
e^x		e^x
ae^{kx}	$\Rightarrow$	ake^{kx}
$a^x = e^{x \ln a}$		$e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$

4 Ableitung von Funktion und Umkehrfunktion

Zwischen der Ableitung einer Funktion f und der zugehörigen Umkehrfunktion f^{-1} bestehen Beziehungen, die es erlauben, aus der Kenntnis der Ableitung von f die Ableitung f^{-1} zu bestimmen.

Zur Vorbereitung
In welchem Zusammenhang stehen die Steigungen zweier Geraden g_1 und g_2, die symmetrisch zur Geraden y = x verlaufen?



Man erkennt den Zusammenhang sofort, wenn man zwei Steigungsdreiecke einzeichnet, die symmetrisch zueinander liegen.

Es gilt: $m_1 = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$; $m_2 = \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}$

Es gilt: $\Delta x_1 = \Delta y_2$; $\Delta x_2 = \Delta y_1$ (Symmetrie!)

d.h. $m_2 = \frac{\Delta x_1}{\Delta y_1} = \frac{1}{m_1}$

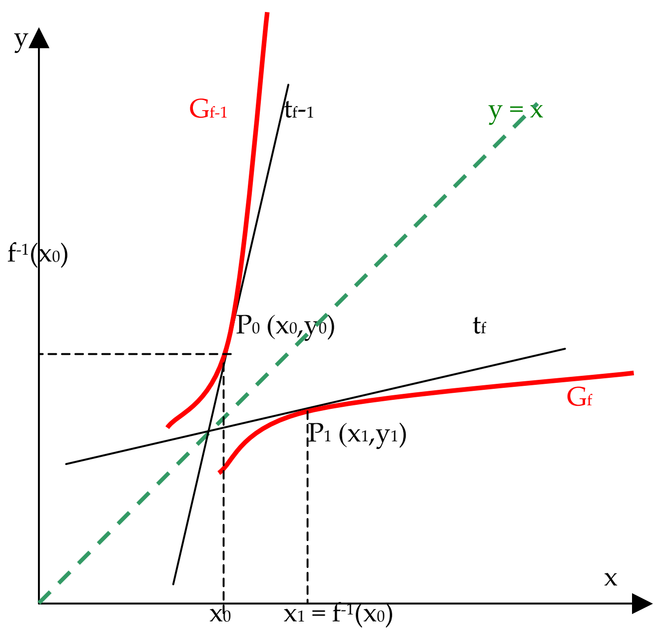
Achtung, Verwechslungsgefahr:
Für zwei aufeinander senkrecht stehende Geraden gilt $m_2 = -\frac{1}{m_1}$

Lösung des Ausgangsproblems
Das Ergebnis lässt sich unmittelbar zur Lösung unseres Problems verwenden. Tangeten von Funktionen und zugehörige Umkehrfunktionen liegen nämlich ebenso symmetrisch zu y = x.
f ʹ und (f^{-1}) geben dann die Tangentensteigungen an.

$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(x_1)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$
(weil $x_1 = y_0 = f^{-1}(x_0)$)

oder allgemein für x

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$



Anwendungsbeispiele

a) $f(x) = x^2$;

$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ (für x > 0!)

Angenommen, wir kennen $(f^{-1})'$ nicht.

Es gilt: $f(x) = x^2$; $f'(x) = 2x$; $\frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x}$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b) Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion

$f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$; $\frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x}$

$f^{-1}(x) = \ln x$, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$

Ergebnis:

$$\boxed{f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}}$$

Mit diesem Ergebnis schließt sich eine Lücke in unseren bisherigen Überlegungen:
Schon früher haben wir nämlich nach einer Funktion mit der Ableitung $\frac{1}{x}$ gefahndet:
Das Integral $\int x^n dx$ konnte für n = -1 nicht ermittelt werden. Jetzt wissen wir:

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$$

Wegen ln 1 = 0 gilt:

$$\int_1^x \frac{1}{x} dx = \ln x \text{ (Beispiele hierzu später!)}$$

Die Ableitungen der Logarithmusfunktionen mit beliebiger Basis ergeben sich folgendermaßen:
Es gilt: $f(x) = \log_b x = \frac{\ln x}{\ln b} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln b}$, $b > 0$; $b \neq 1$