V Logarithmusfunktionen

1 Wiederholung wichtiger Rechengesetze

Übung nach http://www.herder-oberschule.de/madincea/aufg0010/explogub.pdf (untere Hälfte des Arbeitsblattes!) mit folgenden Zusatzfragen:

Berechnen Sie und drücken Sie durch einen einzigen Logarithmus gleicher Basis aus:

$\log_3 (9) + \log_3 (27) =$; $\mathrm{ld}(16) - \mathrm{ld}(\frac{1}{2})$

Was kann man mit dem Exponenten machen? $\log_2 (4^3) =$

Wie lässt sich nach diesem Prinzip $\log_b (1/u)$ schreiben?

Rechengesetze

Sei $b > 0$, $b \neq 1$ eine beliebig festgelegte Basis,
$u > 0$, $v > 0$ lassen dann die Darstellung

$u = b^r$; $v = b^s$ zu.

(Betrachten Sie zur Begründung die Funktion $f: x \to b^x$, die den Wertebereich $\mathbb{R}^+$ hat, so dass $u, v \in W_f$)

Aus $u \cdot v = b^r \cdot b^s = b^{r+s}$ => $\mathbf{\log_b (u \cdot v) =} r + s \mathbf{= \log_b u + \log_b v}$ **(Regel 1)**

Aus $u : v = b^r : b^s = b^{r-s}$ => $\mathbf{\log_b (u : v) =} r - s \mathbf{= \log_b u - \log_b v}$ **(Regel 2)**

Aus $u^k = (b^r)^k = b^{k \cdot r}$ => $\mathbf{\log_b u^k} = k \cdot r = \mathbf{k \log_b u}$ **(Regel 3)**

Nach Regel 3: $\mathbf{\log_b (\frac{1}{u})} = \log_b (u^{-1}) = \mathbf{-\log_b (u)}$

$\mathbf{\log_b 1 = 0}$ für jede Basis b

Basiswechsel

Jeder Logarithmus einer Zahl zu einer Basis lässt sich zu beliebiger anderer Basis $b > 0$, $b \neq 1$ darstellen.

Am Beispiel:

$\log_5 7 = ? = k$

$\Rightarrow 5^k = 7$

$$\Rightarrow b^{\log_b 5^k} = b^{\log_b 7} \Rightarrow b^{k \cdot \log_b 5} = b^{\log_b 7} \Rightarrow k \cdot \log_b 5 = \log_b 7 \Rightarrow k = \frac{\log_b 7}{\log_b 5}$$

Allgemein:

$$\boxed{\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} = \frac{\ln a}{\ln b}}$$

Anwendung:

1. $\log_2 7 \cdot \log_3 2 \cdot \log_7 3 = \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 2} \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 7} = 1$

2. $\log_{11} 2 : \log_5 7 \cdot \log_2 11 = \ldots = \log_7 5$ (allgemein: $\log_a b = 1/\log_b a$)

Gebräuchliche Abkürzungen

Gebräuchliche Abkürzungen sind (z. B. am Taschenrechner) $\boxed{\log}$ für $\log_{10}$ und $\boxed{\ln}$ für $\log_e$, $\boxed{\mathrm{ld}}$ oder $\boxed{\mathrm{lb}}$ für $\log_2$.

2 Die natürliche Logarithmusfunktion

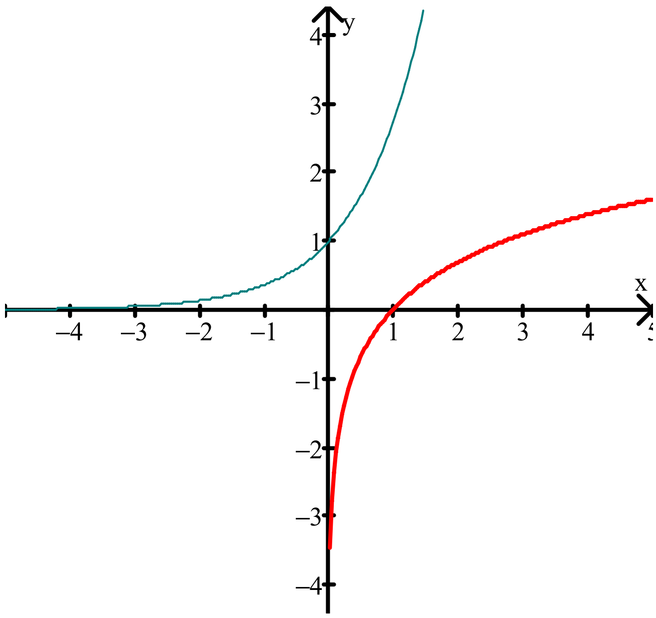
„Altbekannt“ als Umkehrung der exp-Funktion
f: x -> ln x

exp: x -> e^x
Für Definitionsmenge, Wertemenge, Nullstellen, Schnitt mit x-Achse Vergleich mit den Funktionen 2^X und 3^X

Definitionsmenge:
D = IR^+
Wertemenge:
W = IR
Symmetrie:
keine (man betrachte alleine die Definitionsmenge!)
Nullstellen:
ln x = 0 ⇔ x = 1
Extrema:
Da ln(x)' = 1/x ≠ 0 gibt es keine Punkte mit waagrechter Tangente
Monotonie:
Da ln(x)' = 1/x > 0 ist exp auf D = IR^+ streng monoton steigend.
Krümmungsverhalten:
Da ln(x)'' = -1/x² < 0 ist exp stets rechtsgekrümmt => keine Wendepunkte
Verhalten am Rand von D:
$\lim\limits_{x \to 0+} \ln(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to \infty} \ln(x) = +\infty$

Wertetabelle und Graph:

x	y
0.20000	-1.60944
0.40000	-0.91629
0.60000	-0.51083
0.80000	-0.22314
1.00000	0.00000
2.00000	0.69315
3.00000	1.09861
4.00000	1.38629
5.00000	1.60944



3 Allg. Hinweise zur Diskussion von Logarithmusfunktionen

a Definitionsbereiche

ln x ist nur für $x > 0$ definiert.

Beispiele:

1. $f(x) = \ln x^2 + \ln |x|^3$ $\qquad D_{f\,max} = IR \setminus \{0\}$
2. $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-5} \Rightarrow \frac{x+1}{x-5} > 0$ $\qquad \Rightarrow (x+1 > 0 \wedge x-5 > 0) \vee (x+1 < 0 \wedge x-5 < 0)$
   $\Leftrightarrow x > 5 \vee x < -1 \Leftrightarrow D_{f\,max} = IR \setminus [-1; 5]$
3. $f(x) = \ln(4 - x^2)$ $\qquad 4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow D_{f\,max} =]-2;2[$
4. $f(x) = \ln |\ln x|$ $\qquad x > 0 \wedge |\ln x| > 0$ d. h. $x \neq 1 \Leftrightarrow D_{f\,max} = IR^+ \setminus \{1\}$
5. $f(x) = \ln \sqrt{x^2+1}$ $\qquad D_{f\,max} = IR$

b Ableiten

Vor allem, um Ableitungen einfacher zu bilden, empfehlen sich die Gesetze

$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

$\ln(a : b) = \ln a - \ln b$

$\ln a^k = k \ln a$

Allerdings ist **Vorsicht** geboten:
Häufig treten Logarithmen von Betragsfunktionen auf!

Beachte dabei:

Sei $f(x) = \ln |x|$, $D_f = IR \setminus \{0\}$, d.h $f(x) = \begin{cases} \ln x \text{ für } x > 0 \\ \ln(-x) \text{ für } x < 0 \end{cases} \Rightarrow f\,'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ für } x > 0 \\ \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} \text{ für } x < 0 \end{cases}$

d.h. der Funktionsterm der Ableitung unterscheidet sich nicht!

$\boxed{f(x) = \ln |x| \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}}$ (ohne Betragsstriche)

Hinweis:
In Übereinstimmung mit diesem Ergebnis steht in der Formelsammlung deshalb auch
$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$ im Geltungsbereich jeweils IR^+ und IR^-

Sei jetzt allgemein $f(x) = \ln |g(x)|$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \ln g(x) \text{ in allen Bereichen mit } g(x) > 0 \\ \ln(-g(x)) \text{ in allen Bereichen mit } g(x) < 0 \end{cases} \quad \text{In beiden Fällen gilt wieder } f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}}$$

Beispiel

$f(x) = \ln|e^x - 1|$, $f'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$ $D_f = IR \setminus \{0\}$

c Vereinfachen (und Ableiten)

Problem:

$f\,(x) = \ln \dfrac{x+1}{x-5}$, D_f =]-∞, -1[   ]5; +∞[(nach Beispiel 2)

vergleiche mit $\tilde{f}(x) = \ln(x+1) - \ln(x-5), D_{\tilde{f}\,max} =]5;+\infty[\neq D_f$, d.h. es fehlt ein großer Bereich in der Definitionsmenge! Schreibt man statt dessen Beträge, also

$\tilde{f}(x) = \ln|x+1| - \ln|x-5|, D_{\tilde{f}\,max} = \mathrm{IR} \setminus \{5;-1\}$, so wird die Definitionsmenge nicht eingeschränkt. Dass sie größer wird, belastet uns nicht weiter, da wir die Funktion einfach nur auf dem ursprünglichen D_f betrachten.

(1) $\boxed{\ln x^{2n} = \ln |x|^{2n} \text{ für } n \in \mathrm{IN}}$

$f(x) = \ln x^2 + \ln |x|^3 = 2 \ln |x|$ (!!!!) $+ 3 \ln |x| = 5 \ln |x|$; $f'(x) = \frac{5}{x}$

Ohne Vereinfachung wäre dies komplizierter:

$f'(x) = \frac{2x}{x^2} + \frac{3x^2}{x^3} = \frac{2}{x} + \frac{3}{x} = \frac{5}{x}$

(2) $\boxed{\ln \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ln \dfrac{|f(x)|}{|g(x)|}}$ für alle x aus der Definitionsmenge

Innerhalb des ursprünglichen Definitionsbereichs ändert sich nichts, wenn man bestimmte Ausdrücke durch deren Beträge ersetzt.

So gilt, wenn $\dfrac{x+1}{x-5} \underset{(=)}{>} 0$ (Bedingung für Definitionsmenge einer ln Funktion (Argument > 0):

$\dfrac{x+1}{x-5} = \dfrac{|x+1|}{|x-5|}$ (aber auch nur dann!)

In D_f kann man nach der Regel schreiben

$$f(x) = \ln \frac{x+1}{x-5} = \ln \frac{|x+1|}{|x-5|} = \ln |x+1| - \ln |x-5|$$

Der neue Funktionsterm ist zwar überall außer bei x = -1 und x = 5 definiert. Man betrachtet ihn aber nur für D_f =]-∞, -1[   ]5; +∞[

Nun folgt:

$$f\,'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-5} = \frac{x-5-x-1}{(x+1)(x-5)} = \frac{-6}{(x+1)(x-5)}$$

Dies hätte man komplizierter über die Quotientenregel und Kettenregel ermitteln können:

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x+1}{x-5}} \cdot \frac{x-5-(x-1)}{(x-5)^2} = \frac{-6}{x-5}$$

Vor allem auch das weiterrechnen (f'') ist mit der obigen Darstellung günstiger:

$f''(x) = -(x+1)^{-2} + (x-5)^{-2}$

Weiteres Beispiel:

$f(x) = \ln \dfrac{x+3}{5-2x}$

Als maximale Definitionsmenge errechnet man D_f =]-3; 2,5[

$f(x) = \ln |x+3| - \ln |5-2x| \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x+3} + \dfrac{2}{5-2x}$

$f''(x) = \dfrac{-1}{(x+3)^2} + \dfrac{4}{(5-2x)^2}$

4 Grenzwerte von ln x- Funktionen

Bekannt (schon mal im Rahmen einer Übungsstunde behandelt):

$\lim\limits_{x->\infty} \frac{e^x}{x^n} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x->\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} \overset{l'H}{=} ... \overset{l'H}{=} \frac{e^x}{n(n-1)...2} = +\infty$ d. h. die e-Funktion wächst stärker als alle Potenzen

$\lim\limits_{x->\infty} \frac{x^n}{e^x} \overset{l'H}{=} 0$ entsprechend

Vermutung: die ln-Funktion wächst langsamer als jede Potenz

1. $\lim\limits_{x->\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x->\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$
2. $\lim\limits_{x->\infty} \frac{x}{\ln x} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x->\infty} x = +\infty$
3. $\lim\limits_{x->\infty} \frac{\ln x}{x^n} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x->\infty} \frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}} = \lim\limits_{x->\infty} \frac{1}{nx^n} = 0$
4. $\lim\limits_{x->\infty} \frac{x^n}{\ln x} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x->\infty} \frac{nx^{n-1}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x->\infty} nx^n = +\infty$
5. $\lim\limits_{x->o+} x \ln x = \lim\limits_{x->0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x->0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x->0+} x = 0$ (Bem: „$0 \cdot \infty$“ kann alles sein)
6. Sei $r > 0$ $\lim\limits_{x->o+} x^r \ln x = \lim\limits_{x->0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^r}} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x->0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{r}{x^{r-1}}} = \lim\limits_{x->0+} -\frac{x^r}{r} = 0$
7. $\lim\limits_{x->0+} x^x = \lim\limits_{x->0+} e^{\ln x^x} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x->0+} e^{x \ln x} \overset{5}{=} 1$

5 Eine praktischer Integrationstrick

Für eine Funktion f(x) gilt:

Falls $f(x) > 0 : (\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

Falls $f(x) < 0 : (\ln(-f(x)))' = \frac{-f'(x)}{-f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)}$

Insgesamt: $(\ln(|f(x)|))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

Und damit: $\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(|f(x)| + c}$

Anwendungen

$\int \frac{3x^2}{x^3+2} dx = \ln |x^3+2| + c$

$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \ln |\cos x| + c$

$\int \frac{x^{-1}}{\ln x} dx = \ln |\ln x| + c$

Buch S. 156