III Lineare Gleichungssysteme und ihre Lösung

In den Kapiteln II.2 und II.4 wurde die Bedeutung von Linearen Gleichungssysteme (LGS) für Probleme der Analytischen Geometrie deutlich. Deshalb stellt sich die Frage nach systematischen Lösungsverfahren.

1 Lineare Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten

Freiarbeit.
Additionsverfahren, Einsetzverfahren, Gleichsetzungsverfahren (Wer mehr darüber wissen möchte: www.strobl-f.de bei 8. Klasse!).

Welche der Verfahren sinnvoll für Gleichungssysteme mit 3 Gleichungen und drei Unbekannten (oder noch kompliziertere Systeme?). Welche zusätzlichen Vorschriften sind für ein allgemein verwendbares Verfahren notwendig, um zur Lösung zu gelangen?

$$\begin{array}{llll} -8x_1 & -2x_2 & +4x_3 & = 4 \\ 4x_1 & +2x_2 & -x_3 & = 2 \\ 4x_1 & +3x_2 & +x_3 & = -4 \end{array}$$

$x_1 = -9$
$x_2 = 14$
$x_3 = -10$

2 Der Gaußsche Algorithmus – ein allgemeines Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme

Ziel:
Nacheinander werden aus den Gleichungen Variablen eliminiert. Deshalb heißt das Verfahren auch **Gaußsches Eliminationsverfahren.**
Beispiel:

$$\begin{array}{lllll}
x_1 & +x_2 & +x_3 & =2 & \\
3x_1 & -x_2 & -2x_3 & =-1 & \mid -3\cdot(I) \\
-5x_1 & -4x_2 & -x_3 & =0 & \mid +5\cdot(I)
\end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{lllll}
x_1 & +x_2 & +x_3 & =2 & \\
0x_1 & -4x_2 & -5x_3 & =-7 & \\
0x_1 & +x_2 & +4x_3 & =10 & \mid +\frac{1}{4}\cdot(II)
\end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{lllll}
x_1 & +x_2 & +x_3 & =2 & \\
0x_1 & -4x_2 & -5x_3 & =-7 & \text{(Obere Dreiecksform)} \\
0x_1 & +0x_2 & +11/4\,x_3 & =33/4 & \mid :(11/4)
\end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{lllll}
x_1 & +x_2 & +x_3 & =2 & \mid -(III) \\
0x_1 & -4x_2 & -5x_3 & =-7 & \mid +5\cdot(III) \\
0x_1 & +0x_2 & +x_3 & =3 &
\end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{lllll}
x_1 & +x_2 & +0x_3 & =-1 & \\
0x_1 & -4x_2 & +0x_3 & =8 & \mid :(-4) \\
0x_1 & +0x_2 & +x_3 & =3 &
\end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{lllll}
x_1 & +x_2 & +0x_3 & =-1 & \mid -(II) \\
0x_1 & +x_2 & +0x_3 & =-2 & \\
0x_1 & +0x_2 & +x_3 & =3 &
\end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{lllll}
x_1 & +0x_2 & +0x_3 & =+1 & \\
0x_1 & +x_2 & +0x_3 & =-2 & \text{Diagonalform} \\
0x_1 & +0x_2 & +x_3 & =3 &
\end{array}$$

$\Rightarrow x_1 = 1,\; x_2 = -2;\; x_3 = 3$

Erlaubte Zeilenumformungen:
- Addition eines geeigneten Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile
- Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl ungleich Null
- Vertauschung zweier Zeilen

Kurzschreibweise: Zur Abkürzung kann man die Parameter weglassen und das System als sogenannte **erweiterte Koeffizientenmatrix** schreiben:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & -1 \\ -5 & -4 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & \frac{11}{4} & \frac{33}{4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -2; x_3 = 3$$

S. 60/1, 3

3 Determinanten

a Begriffe

Definition:
Fasst man n Vektoren des IR^n zu einer quadratischen Zahlanordnung zusammen, so spricht man von einer **quadratischen** oder **n, n-Matrix.**

$$A = \left(\overrightarrow{a_1}; \overrightarrow{a_2}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \left(\overrightarrow{b_1}; \overrightarrow{b_2}; \ldots \overrightarrow{b_n}\right) = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & & \ldots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Die Elemente der Matrix sind doppelt indiziert: 1. Index Zeile; 2. Index Spalte.
Die Zeilen bzw. Spalten nennt man einzeln auch **Zeilenvektoren** bzw. **Spaltenvektoren.**

Beachte:
1. Ist die Anzahl der Spalten ungleich der Anzahl der Zeilen, so spricht man von einer **Rechtecksmatrix (m,n-Matrix).** Die erweiterte Koeffizientenmatrix aus 2. ist eine n,n+1-Matrix.
2. Die Menge aller n,n-Matrizen bildet einen Vektorraum der Dimension n^2.

Definition:
1. Als **Determinante einer quadratischen 2,2- Matrix** versteht man folgende **reelle Zahl:**

   D = det A= $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} =$ Hauptdiagonale - Nebendiagonale
2. Als **Determinante einer quadratischen 3,3- Matrix** versteht man folgende **reelle Zahl (Entwicklung nach der ersten Zeile):**

   D = det A= $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{11} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

Beispiele:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 11; \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

b Eigenschaften von Determinanten

S. Spiegelungssatz:
Der Wert einer Determinante bleibt gleich, wenn man alle Elemente an der Hauptdiagonale spiegelt. (d.h. die Zeilen und Spalten sind gleichberechtigt.

$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

V. Vertauschungssatz:
Eine Determinante ändert ihr Vorzeichen, wenn man zwei benachbarte Zeilen (Spalten) miteinander vertauscht.

$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} d & a & g \\ e & b & h \\ f & c & i \end{vmatrix}$$

N. Nullwertsatz:
Eine Determinante mit zwei gleichen Zeilen (Spalten) oder zueinander proportionalen Zeilen (Spalten) hat den Wert Null.
Dies ist hinreichend, aber nicht notwendig!

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

M. Multiplikationssatz:
Eine Determinante wird mit einem Skalar multipliziert, indem man eine Zeile (Spalte) mit dem Skalar multipliziert. Umgekehrt kann man ausklammern.

$$k\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka & d & g \\ kb & e & h \\ kc & f & i \end{vmatrix}$$

K. Kombinationssatz:
Der Wert einer Determinante bleibt gleich, wenn man zu einer Zeile (Spalte) eine beliebige Linearkombination der übrigen Zeilen addiert.

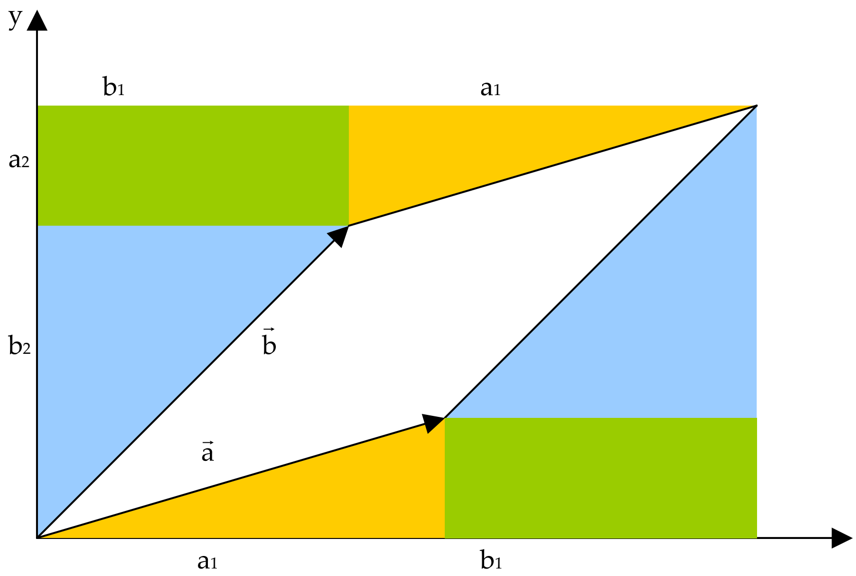
$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det(\vec{a} + k\vec{b} + l\vec{c}, \vec{b}, \vec{c})$$

E. Entwicklungssatz:
Die Determinante einer 3,3- Matrix (oder größer) kann nach einer beliebigen Zeile (Spalte) erfolgen,

wobei folgendes Schema zu berücksichtigen ist. $\begin{vmatrix} + & - & +\ldots \\ - & + & -\ldots \\ + & - & +\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \end{vmatrix}$

c Anwendung: Flächeninhalte im IR²

Durch die linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ ist ein Parallelogramm festgelegt. Bezüglich einer Basis B = (e_x, e_y) (aus Einheitsvektoren) gilt: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.



Für die Fläche des weißen Parallelogramms gilt:

$F(\vec{a};\vec{b}) = F_{Rechteck} - 2\,(F_{grün} + F_{gelb} + F_{blau}) = (a_1 + b_1)\,(a_2 + b_2) - 2 \cdot (a_2 \cdot b_1 + \frac{1}{2}\, a_1 \cdot a_2 + \frac{1}{2}\, b_1 \cdot b_2)$

$= \ldots = a_1 b_2 - a_2\, b_1 = \det(\vec{a};\vec{b})$

Allgemein:

F $(F(\vec{a};\vec{b}) = |\det(\vec{a};\vec{b})|$ -> FS

d Anwendung: Cramer'sche Regel

Satz 1:
Die Determinante einer quadratischen Matrix hat genau dann den Wert Null, wenn die Spaltenvektoren linear abhängig sind.

Ziel
Angabe einer „Lösungsformel" für ein Lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten und zwei Gleichungen.

(I) $a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1$

(II) $\underline{a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2}$ $\quad$ $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \; \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$a_{22} \cdot (I) - a_{12} \cdot (II)$

$\Rightarrow (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\, x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$

$\Rightarrow x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$ (nur falls Nenner $\neq 0$)

Analog ergibt sich $x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$ (nur falls Nenner $\neq 0$)

Cramersche Regel:
Das obige lineare Gleichungssystem hat genau dann eine Lösung, wenn det A $\neq 0$ ist.

Mit $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

folgt für die Lösung des obigen Gleichungssystems: $x_1 = \dfrac{D_1}{D}; x_2 = \dfrac{D_2}{D}$

Cramersche Regel für Gleichungssysteme mit drei Gleichungen und drei Unbekannten:
Ein lineares Gleichungssystem $\overrightarrow{a_1}x_1 + \overrightarrow{a_2}x_2 + \overrightarrow{a_3}x_3 = \vec{b}$ mit drei Gleichungen und drei Unbekannten hat genau eine Lösung wenn $D = \det(\overrightarrow{a_1}; \overrightarrow{a_2}; \overrightarrow{a_3}) \neq 0$ ist. Dann gilt:

$x_1 = \dfrac{D_1}{D}; x_2 = \dfrac{D_2}{D}; x_3 = \dfrac{D_3}{D}$, wobei D_i (i = 1,2,3) aus D durch ersetzen der i-ten Spalte durch $\vec{b}$ entsteht.

Beispiel:

$$\begin{array}{llll} 2x_1 & + 5\,x_2 & - 4\,x_3 & = -3 \\ x_1 & - 3\,x_2 & + 2\,x_3 & = 1 \\ 4x_1 & + \;\; x_2 & - \;\; x_3 & = -1 \end{array}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow \text{eine Lösung}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{D_1}{D} = 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \Rightarrow x_2 = \frac{D_2}{D} = 1$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -10 \Rightarrow x_2 = \frac{D_2}{D} = 2$$

L = {(0|1|2)}

Aufgabe:
Für welche Werte des Parameters s gibt es genau eine Lösung des linearen Gleichungssystems? Wie sind die übrigen Fälle zu deuten?

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + s\,x_2 + 2x_3 &= 3 \\ s\,x_1 + 3x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Eine Lösung für

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & s & 2 \\ s & 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow s^2 + s - 6 \neq 0 \Leftrightarrow (s+3)(s-2) \neq 0 \Leftrightarrow s \neq -3 \wedge s \neq 2$$

=> genau eine Lösung für $s \in IR \setminus \{-3; 2\}$

Sonderfälle:

s = -3

In diesem Fall haben die Spaltenvektoren der linken Seite die Form $\overrightarrow{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}; \overrightarrow{a_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}; \overrightarrow{a_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; die ersten beiden sind offensichtlich linear abhängig, der dritte ist unabhängig von den anderen.
Der Spaltenvektor $\vec{b}$ lässt sich dann

a) **entweder** allein durch $\overrightarrow{a_1}$ und $\overrightarrow{a_3}$ darstellen. x_2 ist dann frei wählbar, es gibt unendlich viele Lösungen. Da der Vektor $\vec{b}$ linear abhängig von $\overrightarrow{a_1}$ und $\overrightarrow{a_3}$ ist, dient als Kriterium nach Satz 1 det $(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_3}, \vec{b})=0$
b) **oder** nicht linear kombinieren. Dies zeigt man mittels det $(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_3}, \vec{b}) \neq 0$; L = {}

Man rechnet nach, dass im Beispiel gilt det $(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_3}, \vec{b}) = -5 \neq 0$, somit L = {}.

s = 2

In diesem Fall haben die Spaltenvektoren der linken Seite die Form $\overrightarrow{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \overrightarrow{a_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \overrightarrow{a_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; sie sind wegen der Determinante (= 0) linear abhängig. Es genügt zu wissen, dass $\overrightarrow{a_1}$ und $\overrightarrow{a_2}$ linear unabhängig sind (dann ist sicher $\overrightarrow{a_3}$ linear kombinierbar). Man rechnet nach, dass gilt:
det $(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \vec{b})=0$, also ∞^1 Lösungen.

e Überblick: Lineare 3,3-Gleichungssysteme

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\, x_1 + a_{12}\; x_2 + a_{13}\; x_3 = b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\; x_2 + a_{23}\, x_3 = b_2 \\ a_{31}\, x_1 + a_{32}\; x_2 + a_{33}\, x_3 = b_3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{a_1}x_1 + \overrightarrow{a_2}x_2 + \overrightarrow{a_3}x_3 = \vec{b}}$$

1. Fall: $\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}; \overrightarrow{a_3}\}$ linear unabhängig

Genau eine Lösung.

2. Fall: Ein Paar $\{\overrightarrow{a_i}, \overrightarrow{a_j}\}$ linear unabhängig, dritter Vektor $\overrightarrow{a_k}$ linear abhängig davon

a) $\vec{b}$ von $\{\overrightarrow{a_i}, \overrightarrow{a_j}\}$ linear unabhängig

0 Lösungen

b) $\vec{b}$ von $\{\overrightarrow{a_i}, \overrightarrow{a_j}\}$ linear abhängig

∞^1 Lösungen

3. Fall: Alle Paare $\{\overrightarrow{a_i}, \overrightarrow{a_j}\}$ linear abhängig und z.B. $\overrightarrow{a_1} \neq 0$

a) $\vec{b}$ von $\{\overrightarrow{a_i}\}$ linear unabhängig

0 Lösungen

b) $\vec{b}$ von $\{\overrightarrow{a_i}\}$ linear abhängig

∞^2 Lösungen

4. Fall: $\overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{a_3} = \vec{0}$

a) $\vec{b} = \vec{0}$

∞^3 Lösungen

b) $\vec{b} \neq \vec{0}$

0 Lösungen