IV Geometrie in Punkträumen

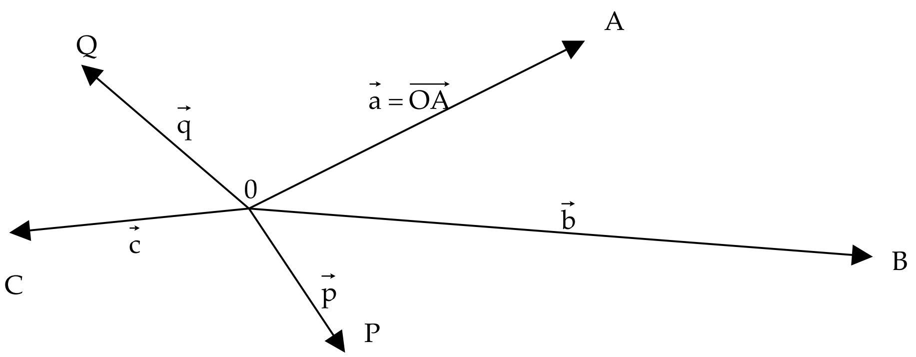
1 Der affine Punktraum P zum Vektorraum V

affin, lat. verwandt, in der Geometrie im Sinne gleichbleibender Abbildungen

- Ausgangspunkt: Geometrischer Vektorraum V mit Axiomen
- Ein bestimmter Punkt ***0*** (**Ursprung**) wird als Bezugspunkt festgelegt
- In ***0*** werden alle Vektoren angesetzt: Jeder Vektor $\overrightarrow{OA}$ beschreibt dann (durch seine Spitze) eindeutig einen Punkt A; Umgekehrt legt jeder Punkt A des Raums einen Vektor $\overrightarrow{OA}$ fest.

Definition:
Der so entstandene Punktraum ohne weitere spezielle Eigenschaften heißt **affiner Punktraum P.**

Beispiel: Anschauungsebene V^2 -> Anschauungspunktraum P^2

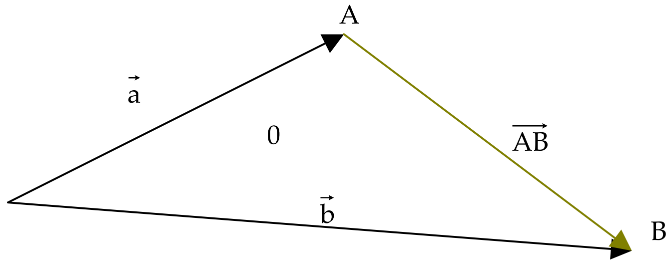


$\vec{x} \in V \to X \in P$: $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$ **Ortsvektor des Punktes X**

Grundlegende Eigenschaften:
(Ax1) Zu $B \in P$ und $\vec{x} \in V$ existiert eindeutig $C \in P$ mit: $\overrightarrow{BC} = \vec{x}$
(Ax2) Für A, B, C aus P gilt: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Folgerungen und Bemerkungen:

(1) Aus (Ax2) folgt mit B = C: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$, also: $\overrightarrow{BB} = \vec{0}$
(2) Damit folgt weiter: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB}$
(3) Festlegung eines Beliebigen Vektors durch Ortsvektoren:
$\overrightarrow{A0} + \overrightarrow{0B} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$



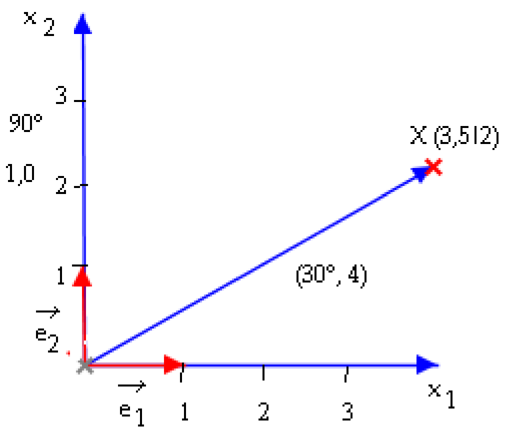
(4) In der Mittelstufe geht man den umgekehrten Weg: Vektordefinition durch Punktpaare.

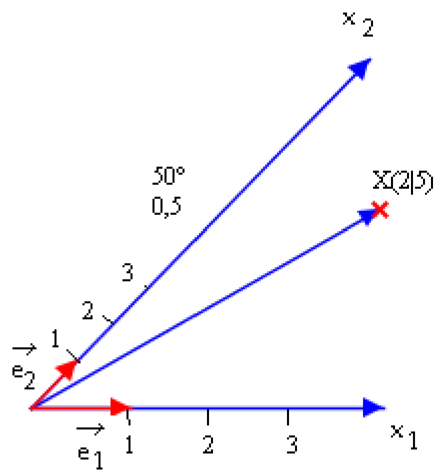
2 *Punktkoordinaten*

Gegeben: - Vektorraum V mit Basis B = $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$
- Punkt O und damit Punktraum P

Dann gilt:
1. Durch die einzelnen Vektoren der Basis mit Bezugspunkt O werden umkehrbar eindeutig Punkte $E_1, E_2, \ldots E_n$ beschrieben.
2. Das Tupel der Punkte $(O, E_1, \ldots E_n)$ nennt man **affines Koordinatensystem von P.**
3. Jeder Punkt X des Punktraumes lässt sich bezüglich des Koordinatensystems durch seine Koordinaten $(x_1 | x_2 | x_3)$ eindeutig darstellen. Insbesondere E_1 $(1|0|\ldots|0)$, E_2 $(0|1|0\ldots|0)$ **Einheitspunkte.**

Beispiel:
Betrachtung desselben Punktes X in unterschiedlichen Koordinatensystemen (mit gleichem Ursprung)





auch noch mit 105°, 1,5

Beachte:
- Jede Basis des Vektorraums erzeugt ein bestimmtes Koordinatensystem im Punktraum.
- Die Punktkoordinaten X $(x_1 | \ldots | x_n)$ hängen vom KoSy ab.
- Die kanonische Basis erzeugt das sog. kartesische KoSy.

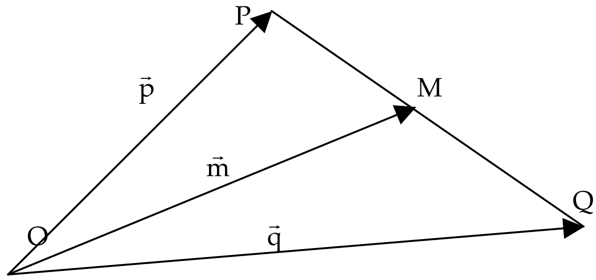
Aufgabe:
Auf der Zahlengeraden g wird durch O und die gerichtete Einheitsstrecke ein Koordinatensystem erzeugt. Welche neuen Koordinaten erhalten O und A(2), B (4,5), C (-1,7), D ($\sqrt{2}$), wenn E (-3) Ursprung und $\overrightarrow{AB}$ Basisvektor ist?

A (2), B (3); C (0,52), D (6/5 + 2/5 $\sqrt{2}$)

HA: S79/ Beispiel 3.1 anschauen und auf S. 80, 1 anwenden

3 Teilung einer Strecke

a Teilung im Verhältnis 1 : 1; Mittelpunkt



Geschlossene Vektorketten:

ΔPOM: $\overrightarrow{PM} = \vec{m} - \vec{p}$

ΔMOQ: $\overrightarrow{MQ} = \vec{q} - \vec{m}$

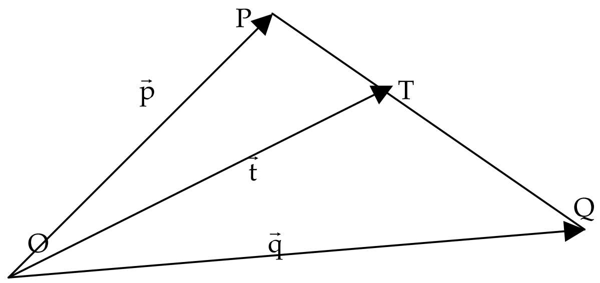
Für den Mittelpunkt der Strecke gilt:

$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MQ}$ und man darf gleichsetzen:

$\vec{m} - \vec{p} = \vec{q} - \vec{m}$

=> $\boxed{\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{p} + \vec{q})}$

b Das allgemeine Teilverhältnis



Bezeichnung: TV (P,Q,T) = τ

Anfangspunkt P

Endpunkt Q

Teilpunkt T

Teilverhältnis, falls T zwischen P und Q:

$\tau = \frac{\overline{PT}}{\overline{TQ}}$

Allgemein: $\boxed{\overrightarrow{PT} = \tau\overrightarrow{TQ}}$

$\vec{t} - \vec{p} = \tau(\vec{q} - \vec{t})$

=> $(1 + \tau)\vec{t} = \vec{p} + \tau\vec{q}$

=> $\boxed{\vec{t} = \frac{1}{(1+\tau)}(\vec{p} + \tau\vec{q}); \tau \neq -1}$

Beispiele:

1. P (0|2); Q (6|5). Berechne die Koordinaten von T mit $\tau = ½$. Ergebnis: T (2|3)
2. A (2|1) ; B (0|-1), C (3|2)

   TV (A, B, C): $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+\tau}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$

   Aus den beiden Koordinaten ergeben sich zwei Gleichungen, die separat zu lösen sind:

   $\left.\begin{matrix} 3 = \frac{2}{1+\tau} \\ 2 = \frac{1-\tau}{1+\tau} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} \tau = -\frac{1}{3} \\ \tau = -\frac{1}{3} \end{matrix}$

   Das identische Ergebnis aus beiden Gleichungen bedeutet, dass C auf der Geraden g (A,B) liegt.
   Der negative Wert für τ bedeutet, dass C außerhalb von [AB] liegt.

Beachte:

1. Falls bekannt ist, dass der Teilpunkt auf der Geraden liegt, genügt zur Berechnung von τ eine der Koordinatengleichungen.
2. Positives Teilverhältnis bedeutet innere Teilung, negatives Teilverhältnis äußere Teilung.

c Analytische Betrachtung des Teilverhältnisses

Systematisierung:

- A liege im Ursprung, B auf der positiven x-Achse
- Teilpunkt X (x|0) wandert auf der x-Achse
- Teilverhältnis τ (x)

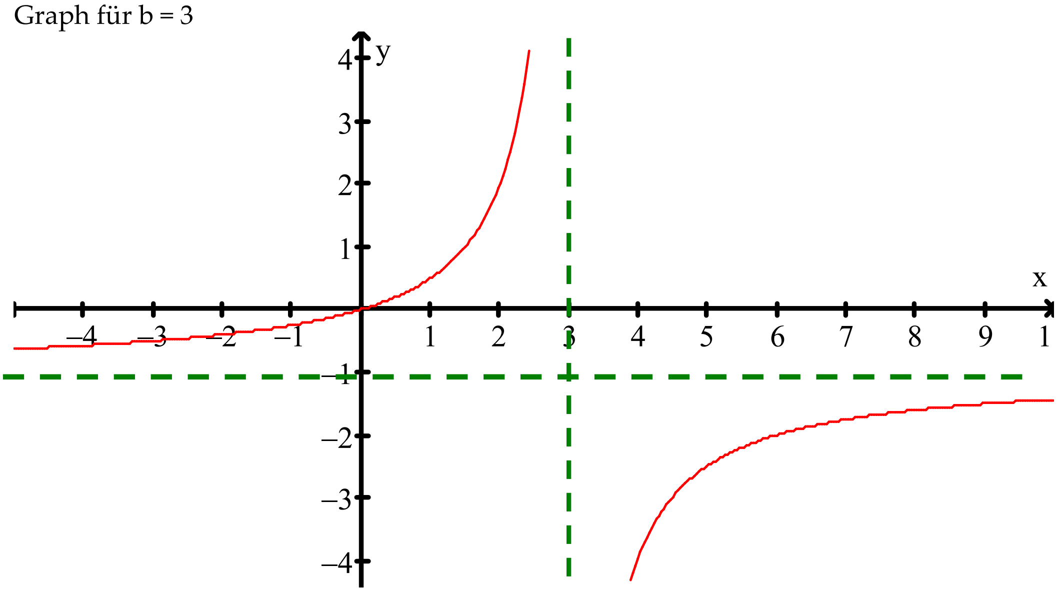
$$\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{1+\tau}\left[\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\tau\begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix}\right] \Rightarrow x=\frac{\tau b}{1+\tau} \Rightarrow x+\tau x=\tau b \Rightarrow$$

$$\tau(x)=\frac{x}{b-x} \quad x\neq b$$

Eigenschaften:

1. Nullstelle bei x = 0
2. Polstelle 1. Ordnung bei x = b
3. Waagrechte Asymptote bei y = -1 (l' Hospital)

Graph für b = 3



TV (Abgelesen am Graphen)

-2/3 -1/2 -1/3 0 1 2 3 ±∞ -4 -3 -2 -1,5

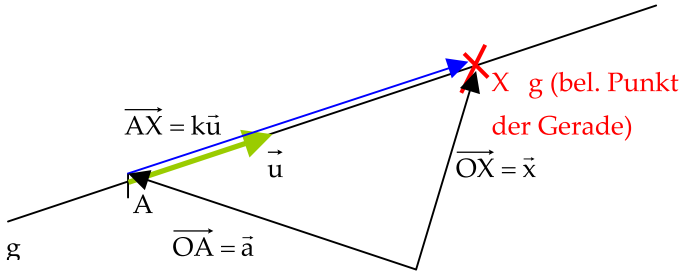
Ergebnis:

Für –1 < τ < 0 liegt der Teilpunkt außerhalb der Strecke [AB] auf der Seite des Anfangspunktes, für τ < -1 außerhalb auf der Seite des Endpunktes.

4 Gerade und Ebene im affinen Punktraum

4.1 Parametrische Darstellungsformen für Geraden

- *Überschrift erst weglassen. Dann Ortsvektor a + b ; a + 2b; a –2b, usw.*
- *Auf welchem Gebilde liegen alle Punkte, die man in obiger Weise darstellen kann?*



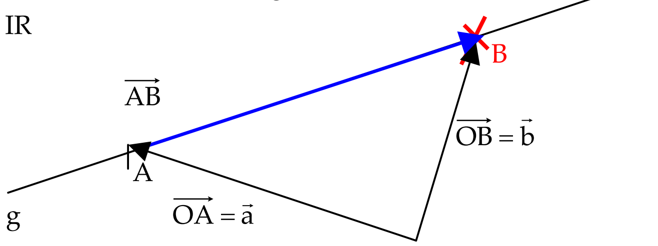
Punkt- Richtungsform der Geraden (Parameterform):

$\boxed{g:\ \vec{x} = \vec{a} + k\vec{u} \quad k \in \mathbb{R}}$

$\vec{a}$: Ortsvektor des Aufpunktes
k: Parameter
$\vec{u}$: Richtungsvektor der Geraden

Punkt-Punkt-Form der Geraden

Eine Gerade lässt sich auch durch zwei verschiedene Punkte A und B festlegen. Als Richtungsvektor dient dann der Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$. Aus der ersten Form ergibt sich g: $\vec{x} = \vec{a} + k(\vec{b} - \vec{a})$ $k \in \mathbb{R}$



- *Was bedeutet k = 0? K durchläuft alle Zahlen, also erhalten wir alle Punkte auf der Geraden.*

Beispiele

1. Gerade h durch die Punkte A(3/2) und B(7/5):

$$h:\ \vec{x} = \vec{a} + k(\vec{b} - \vec{a})$$

$$h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Andere Möglichkeit: a-b als Richtungsvektor

Lageprüfung für P (5|3,5) ($\in h$), Q (7|9) ($\notin h$)

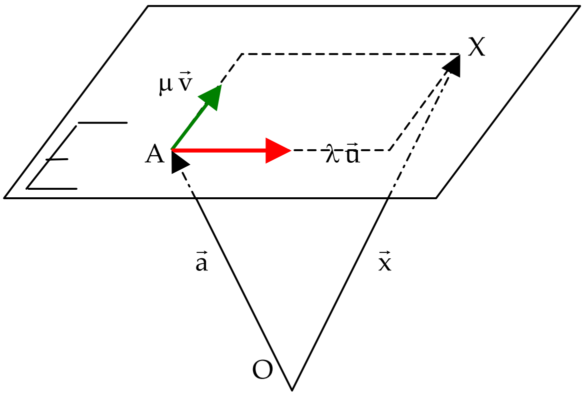
2. Dazu parallele Gerade durch den Punkt C(2/2):
Unterschiedlicher Aufpunkt gleicher Richtungsvektor

3. Gleichung der Koordinatenachsen:

z.B. x –Achse: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *(Wo hätte man noch einen Aufpunkt wählen dürfen für die Gleichung der x-Achse? Alternativen für Richtungsvektor?)*

4.2 Parametrische Darstellungsformen für Ebenen

Festlegung einer Ebene durch Punkt und zwei Richtungsvektoren

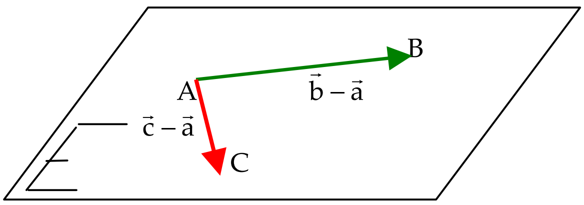


Ein beliebiger Punkt $X \in E$ ergibt sich mit dem Aufpunkt A und den Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ durch die

Punktrichtungsform

$\boxed{\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}}$ $\lambda,\mu \in$ IR Parameter

Festlegung einer Ebene durch drei Punkte



Liegen drei Punkte nicht auf einer Geraden, dann sind z.B. die Vektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AB}$ linear unabhängig und somit als Richtungsvektoren verwendbar.

Dreipunkteform:

$\boxed{\vec{x} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}) + \mu(\vec{c} - \vec{a})}$ **$\lambda,\mu \in$ IR Parameter**

Bemerkung:

1. Parameterformen von Geraden- und Ebenengleichungen sind nicht eindeutig.
2. Die Vektoren einer Gerade und einer Ebene im IR^3 erfüllen die Vektorraumaxiome und bilden so einen **Untervektorraum** des IR^3 mit Dimension 1 bzw. 2
3. Vektorielle Geometrie basiert wesentlich auf der Lösung linearer Gleichungssysteme.

4.3 Lagebeziehung Punkt – Gerade bzw. Punkt - Ebene

Es gilt:

1. Ein Punkt P (mit Ortsvektor $\vec{p}$) liegt auf einer Geraden g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$, falls $\vec{p}$ die Geradengleichung erfüllt, d.h. $\vec{p} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$ ist lösbar.
2. Entsprechendes gilt für die Lagebeziehung Punkt – Ebene.

Beispiele:

1. Liegt P in E (A, B, C)?

A (1|1|1); B (2|1|2) C (3|2|2); P (0|-2|3)

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

=> LGS durch Einsetzen von $\vec{p}$

$(I) 0 = 1 + \lambda + 2\mu$

$(II) -2 = 1 + \mu$

$(III) 3 = 1 + \lambda + \mu$

Aus Gleichung (II) und (I) folgt $\mu = -3$, $\lambda = 5$, mit diesen Werten ist auch Gleichung (III) erfüllt.

=> $P \in E$ (A, B, C)

2. Liegt P auf g (A, B)?

A (2|3|4), B(1|0|0), P (4|9|3)

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

=> LGS durch Einsetzen von $\vec{p}$

$(I) 4 = 1 + \lambda$

$(II) 9 = 3\lambda$

$(III) 3 = 4\lambda$

Dieses Gleichungssystem ist offenbar nicht eindeutig lösbar. => $P \notin g$ (A, B)

4.4 Lagebeziehungen von Geraden

Man unterscheidet vier Fälle im IR³:

(1) identisch
(2) echt parallel
(3) sie schneiden sich
(4) windschief

(1) und (2) zusammen: parallel

a Identische und echt parallele Geraden

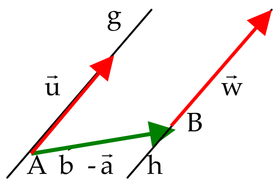
Geg: g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$
h: $\vec{x} = \vec{b} + \lambda\vec{w}$

Es gilt:

g | | h ⇔ $\{\vec{u}, \vec{w}\}$ sind linear abhängig
(Im IR²: det($\vec{u}, \vec{w}$) = 0)

Weitere Unterscheidung

- g und h sind echt parallel
  g | | h und g nicht identisch h
  zeige: $\{\vec{u}, \vec{w}\}$ sind linear abhängig und $\vec{a} \notin$ h (oder $\vec{b} \notin$ g)
  oder zeige: $\{\vec{u}, \vec{w}\}$ sind linear abhängig, $\{\vec{u}, \vec{b} - \vec{a}\}$ linear unabhängig



- g und h sind identisch
  zeige: $\{\vec{u}, \vec{w}\}$ sind linear abhängig und $\vec{a} \in$ h (oder $\vec{b} \in$ g)
  oder zeige: $\{\vec{u}, \vec{w}\}$ sind linear abhängig und $\{\vec{u}, \vec{b} - \vec{a}\}$ linear abhängig

b Sich schneidende oder windschiefe Geraden

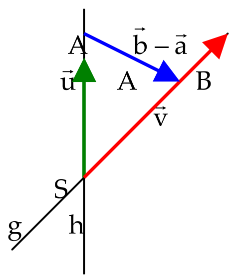
Geg: g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$
h: $\vec{x} = \vec{b} + \lambda\vec{w}$

Es gilt:

g und h sind windschief oder schneiden sich ⇔ $\{\vec{u}, \vec{w}\}$ sind linear unabhängig

Weitere Unterscheidung

- Die Geraden schneiden sich: g ∩ h = {S}
  zeige: $\{\vec{u}, \vec{w}\}$ sind linear unabhängig und $\{\vec{u}, \vec{w}, \vec{b} - \vec{a}\}$ linear abhängig
  (d.h. det($\vec{u}, \vec{w}, \vec{b} - \vec{a}$)=0)
- Die Geraden sind windschief
  $\{\vec{u}, \vec{w}, \vec{b} - \vec{a}\}$ linear unabhängig (d.h. det($\vec{u}, \vec{w}, \vec{b} - \vec{a}$)≠0)



Beispiele:

1. g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   h: $\vec{x} = \vec{b} + \lambda\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\{\vec{u}, \vec{w}\}$ sind offensichtlich linear unabhängig.
Ansatz zur Überprüfung auf Schnittpunkt: g = h

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

=> LGS

$(I) 1 = \mu$

$(II) \lambda = 1 + \mu \overset{(I)}{=}> \lambda = 2$

$(III) \lambda = 2\mu$

Da die dritte Gleichung mit den Werten aus (I) und (II) erfüllt ist, existiert ein Schnittpunkt.

Die Koordinaten des Schnittpunkts erhält man durch einsetzen der Werte von λ in g oder von μ in h.

2. g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   h: $\vec{x} = \vec{b} + \lambda\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Ergebnis: S (-1; -1)

3. g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

   h: $\vec{x} = \vec{b} + \lambda\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

   Gleichungssystem hat keine Lösung => windschief.
   Schneller (nur beim Nachweis der Windschiefheit): det $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{b} - \vec{a}) \neq 0$
   Im Beispiel hat die Determinante den Wert -68

4.5 Parameterfreie Darstellung für Gerade und Ebene

a Gerade im IR²

In der Geradengleichung

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (in diesem Fall wird auch keine Gerade beschrieben!) gelingt es, den Parameter k zu eliminieren:

Sei ohne Einschränkung $b_1 \neq 0$. => $k = (x_1 - a_1) / b_1$.

Eingesetzt in die zweite Gleichung:

$x_2 = a_2 + (x_1 - a_1)\, b_2/ b_1$ **Dies entspricht nach kleiner Umformung der bekannten Form: $y = mx + t$ bzw. $x_2 = mx_1 + t$**

$\Leftrightarrow x_2 b_1 = a_2b_1 + x_1b_2 - a_1b_2$

$\boxed{b_2 x_1 - b_1 x_2 - a_2b_1 + a_1b_2 = 0}$ Parameterfreie Darstellungsform (**Koordinatenform)** einer Geraden im IR²

Bemerkung:

1 Die Gleichung ist bis auf Multiplikation mit einer Zahl eindeutig.

2 Im IR³ existiert keine bis auf Multiplikation eindeutige parameterfreie Darstellung einer Geraden.

Beispiel zu Bemerkung 2:

$$g: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Man erhält parameterfreie Darstellungen aus

z. B. (I) + (II) – (III): $x_1 + x_2 - x_3 = -1$ (*)

4(I) + (II) – 2(III): $4x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$ (**)

Würden diese parameterfreien Darstellungen die Gerade eindeutig beschreiben, so würde nach (*) z. B. (1|1|3) auf der Geraden liegen. Dies ist aber nicht verträglich mit (**) (einsetzen!) und der Parameterform der Gerade!

b Ebene im IR^3

Wie bei der Gerade im IR^2 lassen sich aus der Parameterform im IR^3 die Parameter eliminieren und man gewinnt eine bis auf Reihenfolge und einen Faktor eindeutige Darstellungsform.

Beispiel:

$$E: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Durch Addition der ersten Gleichung zur zweiten und dritten wird der Parameter k eliminiert. Aus den entstehenden Gleichungen entfernt man l und erhält

$E: x_1 + 2x_2 - x_3 - 3 = 0$

Koordinatenform der Ebene im IR^3:

$$\boxed{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 = 0}$$

Wichtige Fragestellungen, die sich besonders leicht mit der Koordinatenform beantworten lassen:

1. Liegt P in der Ebene?

Einsetzen der Koordinaten des Punktes in die Gleichung.

Im obigen Beispiel: $(3|5|10) \in E$, da $3 + 2 \cdot 5 - 10 - 3 = 0$

2. Schnittpunkte mit den Achsen?

Für den Schnittpunkt mit der x_1 – Achse müssen x_2 und x_3 den Wert 0 annehmen. => $x_1 = -a_4/a_1$ u.s.w.

Besonders einfach wird es, wenn a_4 den Wert -1 annimmt. Dann ergeben sich als Schnittpunkte die Kehrwerte der Vorfaktoren.

$\boxed{\frac{x_1}{k_1} + \frac{x_2}{k_2} + \frac{x_3}{k_3} = 1}$ **(Achsenabschnittsform)**

$\frac{x_1}{2} + 2x_2 - \frac{x_3}{3} = 1$ => Schnittpunkt mit x_1 – Achse: 2; mit x_2 – Achse: ½ ; mit x_3-Achse: -3

3. Parameterform aus der Koordinatenform?

Aus der Koordinatenform errechnen sich leicht drei Punkte, die in der Ebene liegen. Mit Hilfe der Dreipunktform ergibt sich eine Koordinatenform.

Im Beispiel: (0|0|-3), (3|0|0) und (0|1,5|0) liegen in der Ebene.

$$\Rightarrow E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

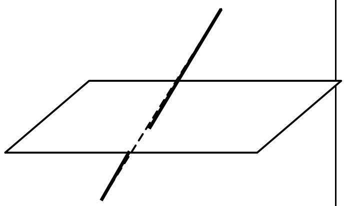
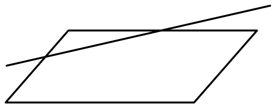
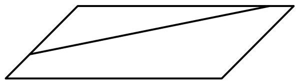
Noch einfacher: Wähle $x_1 = k$, $x_2 = l$ => $x_3 = k + 2l - 3$

$$\Rightarrow E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4.6 Schnitt von Gerade und Ebene im IR³

Sei E: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ (bzw. E: $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 = 0$), g: $\vec{x} = \vec{b} + \kappa\vec{w}$

Man unterscheidet anschaulich drei Fälle:

	g und E schneiden sich	**g und E sind echt parallel**	**g liegt in E**
			
Kriterium 1: (Parameterform)	Die 3 Richtungsvektoren sind l.u.	$\vec{w}$ l. a. von $\{\vec{u},\vec{v}\}$, $\vec{b} \notin E$	$\vec{w}$ l. a. von $\{\vec{u},\vec{v}\}$, $\vec{b} \in E$
Kriterium 2: (Parameterform)		$\vec{w}$ l. a. von $\{\vec{u},\vec{v}\}$, $\{\vec{u},\vec{v},\vec{b}-\vec{a}\}$ l.u.	$\vec{w}$ l. a. von $\{\vec{u},\vec{v}\}$, $\{\vec{u},\vec{v},\vec{b}-\vec{a}\}$ l.a.
Kriterium 3: (Koordinatenform)	Die Zeilen von g eingesetzt in E ergeben eine **eindeutig lösbare** Gleichung	Die Zeilen von g eingesetzt in E ergeben eine **unlösbare** Gleichung	Die Zeilen von g eingesetzt in E ergeben eine **allgemein gültige** Gleichung

Beispiele zu den möglichen Fällen mit Parameterform

$\boxed{1.}$ Bestimme den Schnittpunkt der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ mit der Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Gleichsetzen führt auf das folgende Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -2 & -2 \\ -5 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right| \overset{\substack{(II)+2(I) \\ (III)+5(I)}}{\sim} \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 13 & 4 & -14 \end{array}\right| \sim \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right|$$

Mit m = 1 und n = ¼ erhält man durch einsetzen in E den Schnittpunkt P (2 ¼; 5 ½; 1 ¾)

$\boxed{2.}$ Untersuche auf die Existenz von gemeinsamen Punkten:

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Prüfe zunächst die lineare Abhängigkeit der Richtungsvektoren:

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{3.Zeile}}{\overset{\text{Entw.nach}}{=}} -18 + 2 - (-12 - 4) = 0$$

=> E und g parallel oder g in E

Prüfe deshalb (siehe Tabelle), ob $\{\vec{u},\vec{v},\vec{b}-\vec{a}\}$ l.u.

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 0-(-4) \\ 4 & -2 & 7-(-1) \\ 1 & 1 & 4-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 4 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -44 \neq 0$$

=> g und E sind echt parallel

$\boxed{3.}$ Untersuche auf die Existenz von gemeinsamen Punkten:

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren sind wie in Aufgabe 2, die Untersuchung, ob $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{b} - \vec{a}\}$ l.u. führt zum Ergebnis, dass g in E liegt.

Beispiele zu den möglichen Fällen mit Ebenen in Koordinatenform

$\boxed{4.}$ Bestimme die Schnittmenge der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ mit der Ebene E: $6x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 34$

Einsetzen der Zeilen von g in E:

6(3-k) + 5 (4 +2k) – 4(-2 +5k) = 34

⇔ 18 – 6k + 20 + 10k +8 – 20 k = 34

⇔ - 16 k = -12 <=> k = ¾

Eingesetzt in g ergibt den Schnittpunkt P (2 ¼; 5 ½; 1 ¾) (Vergleiche mit Aufgabe 1)

$\boxed{5.}$ Untersuche auf die Existenz von gemeinsamen Punkten:

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und E: $3x_1 + x_2 - 16x_3 = -57$

Einsetzen der Zeilen von g in E:

3(-4 + 4k) –1 + 4k – 16k = -57

-12 + 12k –12 k = -56 nicht lösbar => keine gemeinsamen Punkte! (Vergleiche mit Aufgabe 2)

$\boxed{6.}$ Untersuche auf die Existenz von gemeinsamen Punkten:

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und E: $3x_1 + x_2 - 16x_3 = -57$

Einsetzen der Zeilen von g in E:

3 (-3 + 4k) + 4k – 16 (3 + k) = -57

-9 + 12k + 4k – 48 – 16k = -57

Diese Gleichung ist erfüllt für alle k. Die Gerade liegt ganz in E.

Aufgaben: S. 114

4.7 Räumliche Darstellung von Geraden und Ebenen

Abitur 1983/VII

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte C (0|0|6) und M (3|3|0) gegeben, ferner der Vektor

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

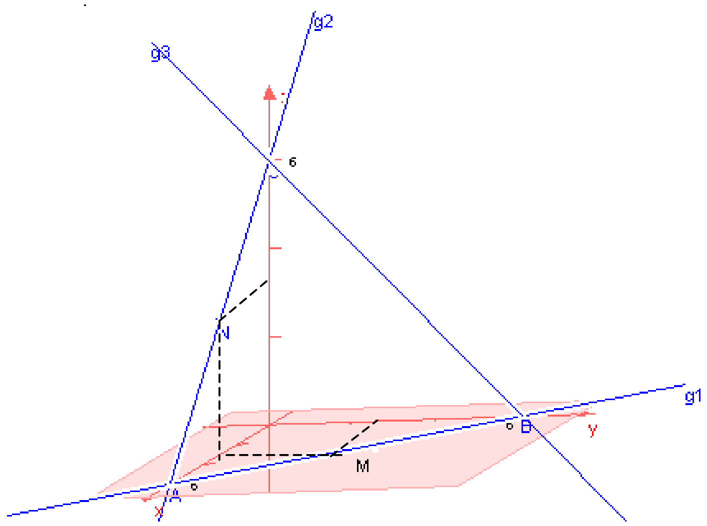
a) Die Vektoren $\overrightarrow{CM}$ und $\vec{u}$ sind linear unabhängig. Stellen Sie die Gleichung der Ebene E_1 durch M auf, welche $\overrightarrow{CM}$ und $\vec{u}$ als Richtungsvektoren hat (1 BE)

b) Der Schnittpunkt von E_1 mit der x_1-Achse sei A, der mit der x_2-Achse sei B. Der Mittelpunkt der Strecke [AC] sei N.
Bestimmen Sie die Koordinaten von A, B und N und Berechnen Sie die Seitenlängen im Dreieck ABC. (4 BE)

c) Fertigen Sie eine Skizze an, aus der die Lage der vorkommenden Punkte im räumlichen Koordinatensystem ersichtlich ist. (4 BE)

Lösung zu b) A(6|0|0); B (0|6|0)
$\vec{n} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c})$ N(3|0|3)

Skizze



Bemerkungen zum räumlichen Zeichnen

1. Die x_1 Achse kann (muss aber nicht) verkürzt dargestellt werden.
2. Ermittle zum Zeichnen von Ebenen deren Spurgeraden (= Schnittgeraden mit Koordinatenebenen), zum Zeichnen von Geraden Spurpunkte.
   Bedingung für...
   ... Grundrissspur: $x_3 = 0$
   ... Aufrissspur: $x_1 = 0$
   ... Seitenrissspur: $x_2 = 0$

Weitere Beispiele: Buch S 124-126, insbes. Bsp. 3.43
Aufgaben S. 126/ 1 – 5

4.8 Lagebeziehungen von Ebenen

Zwei Ebenen im R^3 können ....
... sich schneiden (Schnittmenge: Gerade)
... echt parallel sein (Schnittmenge: leer)
... identisch sein (Schnittmenge: Ebene)

a. Beide Ebenen in Koordinatenform
$E_1: a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a$, $E_2: b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = b$

Verfahren:
Das lineare Gleichungssystem ist überbestimmt. Wähle z.B. $x_1 = r$. Ermittle x_2 und x_3 in Abhängigkeit von r. Stelle dann die Gleichung der Gerade auf. Ergibt sich im Verlauf eine allgemein gültige oder eine unlösbare Gleichung, so bedeutet dies Identität bzw. Parallelität der Ebenen.

Beispiel: Schnittgerade von E_1: $x_1 + x_2 - x_3 = 1$ und E_2: $2x_1 + x_2 + x_3 = 5$
$x_2 - x_3 = 1 - r$
$x_2 + x_3 = 5 - 2r$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1-r \\ 1 & 1 & 5-2r \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 6-3r \\ 1 & 1 & 5-2r \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3-1{,}5r \\ 0 & 1 & 2-0{,}5r \end{array}\right)$$

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} r \\ -1{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$$

b. Nur eine Ebene in Koordinatenform
$E_1: \vec{x} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{u}_1 + \mu\vec{v}_1$ $E_2: b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = b$

Verfahren:
Setze die Zeilen von E_1 in E_2 ein und erhalte eine Gleichung für λ in Abhängigkeit von μ. Setze dieses λ wiederum in E_1 ein und erhalte die Schnittgerade.
Ist die Gleichung unlösbar, so sind die Ebenen echt parallel. Ist sie allgemeingültig, so fallen die Ebenen zusammen.

Beispiel: Schnittgerade von E_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und E_2: $2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 10 = 0$

Lösungsgerade siehe Bsp. 2 aus a.

c. Beide Ebenen sind in Parameterform gegeben
$E_1: \vec{x} = \vec{a}_1 + \lambda_1\vec{u}_1 + \mu_1\vec{v}_1$ $E_2: \vec{x} = \vec{a}_2 + \lambda_2\vec{u}_2 + \mu_2\vec{v}_2$
E_1 und E_2 **schneiden sich** $\Leftrightarrow$ mindestens ein Richtungsvektor (RV) von E_1 ist l. u. von den RV von E_2.
E_1 und E_2 **echt parallel** $\Leftrightarrow$ beide RV von E_1 sind l. a. von den RV von E_2; zugleich ist die Differenz der Ortsvektoren der Antragspunkte l. u. von den RV von den Richtungsvektoren einer (egal welcher) Ebene.
E_1 und E_2 **identisch** $\Leftrightarrow$ beide RV von E_1 sind l. a. von den RV von E_2; zugleich ist die Differenz der Ortsvektoren der Antragspunkte l. a. von den RV von den Richtungsvektoren einer (egal welcher) Ebene.

Ermittlung der Schnittgerade:
Gleichsetzen und Eliminieren von zwei Parametern einer Ebene, z.B. λ_2, μ_2. Die entstandene Gleichung löst man z.B. nach λ_1 auf und setzt dies in E_1 ein; dabei entsteht eine Geradengleichung.

Beispiele

1. Lagebeziehung von E_1 : $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$ und E_2 : $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\-1\\7\end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix}$

Es gilt: $\det\left(\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\7\end{pmatrix}\right)$=0; $\det\left(\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix}\right)$=0; $\det\left(\begin{pmatrix}0-1\\3-0\\0-0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix}\right)$=-20, also sind die Ebenen echt parallel.

2. Schnittgerade von E_1 : $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + m \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + n \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ und E_2 : $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix} + r \begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix} + s \begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$

$$m\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & -3r+4\\0 & 1 & 0 & 2r-2\\0 & 0 & -2 & -2\end{array}\right) \underset{(I)-2(II)}{\overset{(III):2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 3 & -7r+8\\0 & 1 & 0 & 2r-2\\0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right) \overset{(I)-3(III)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & -7r+5\\0 & 1 & 0 & 2r-2\\0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

Die Lösung ergibt sich nun z.B., indem man m = -7r + 5 und n = 2r – 2 in die Gleichung von E_1 einsetzt.
Einfacher: s = 1 (nur zufällig ist hier r herausgefallen, sonst muss man halt sortieren!) in die Gleichung von E_2. g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$