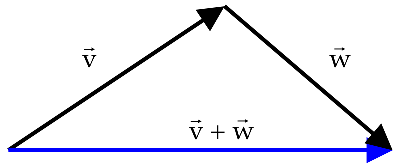
V Metrische Probleme und das Skalarprodukt

Bisher: Probleme wie Schnittgerade, usw. können gelöst werden. Jetzt: Winkel, Abstand von Geraden und zweier Punkte, usw. durch Einführung des:

1 Abstand zweier Punkte - Betrag eines Vektors

Sinnvolle Forderungen an eine Abstandsnorm:

1. $\|\vec{v}\| > 0$ für alle Vektoren mit der Ausnahme $\|\vec{0}\| = 0$
2. $\|s\vec{v}\| = |s| \cdot \|\vec{v}\|$ mit einem Skalar s.
3. Dreiecksungleichung $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$

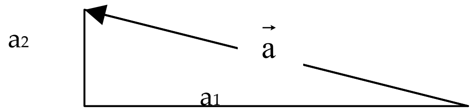


Der Abstand zweier Punkte lässt sich dann definieren über:

$\boxed{d(A,B) = \overrightarrow{AB}}$

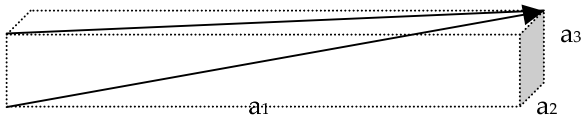
Aus dem zweiten Zusammenhang folgt für m = -1, dass Vektor und Gegenvektor gleich lang sind.

a) Euklidische Norm im IR²



Es gilt: $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

b) Im IR³



Es gilt: $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Beispiele:

1) Abstand d zweier Punkte A und B mit den Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:
2) Welcher Gleichung müssen die Koordinaten aller Punkte X auf der Kugel um P(4|1|-1) genügen?
3) Berechne den Abstand des Schwerpunkts des Dreiecks ABC von A(4|2|-1), B(10|-8|9) und C(4|0|1).

Seitenhalbierende teilen sich im Verhältnis 1:2!

$$\boxed{d = \|\vec{d}\| = \sqrt{\vec{d} \circ \vec{d}} = \sqrt{\vec{d}^2} = \sqrt{(\vec{b} - \vec{a})^2} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}}$$

Definition:

Ist $\|\vec{a}\| = 1$, so heißt a Einheitsvektor oder normierter Vektor.

Jedem Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ lässt sich ein Einheitsvektor $\vec{a}^{\,0}$ mit gleicher Richtung zu $\vec{a}$ zuordnen durch:

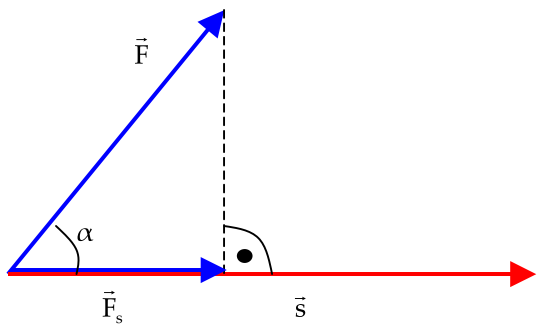
$$\vec{a}^{\,0} := \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}$$

Umgekehrt gilt für den Vektor $\vec{a}$: $\vec{a} = \vec{a}^{\,0} \cdot \|\vec{a}\|$

2 Definition und Rechengesetze des Skalarproduktes

Warum so ähnlich wie die Skalarmultiplikation (IR x V -> V)? Weil ein Skalar herauskommt!

Bekannt aus der Physik: Berechnung der Arbeit



Arbeit = Weg · Kraft in Wegrichtung

$W = s \cdot F_s$
$W = s \cdot (F \cos \alpha)$

$W =: \vec{s} \circ \vec{F}$

Ist $\vec{s} \perp \vec{F}$, so ist $W = 0\,J$

In der Mathematik fand man zur entsprechenden

Definition:

Sei $\varphi \in [0°,180°]$, der kleinere der beiden Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Wir definieren das Skalarprodukt $\vec{a} \circ \vec{b}$ von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ durch:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \left\|\vec{a}\right\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cos \varphi$$

Grundlegende Gesetze (Axiome):

1) $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$ Kommutativgesetz
2) $\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$ Distributivgesetz
3) $(k\vec{a}) \circ \vec{b} = k(\vec{a} \circ \vec{b})$ für $k \in IR$ Gemischtes Assoziativgesetz
4) $\vec{a}^{\,2} := \vec{a} \circ \vec{a} = \left\|\vec{a}\right\|^2 > 0$, falls $\vec{a} \neq \vec{0}$ und damit $\left\|\vec{a}\right\| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$

Besonderheiten:

Seien $\left\|\vec{a}\right\|, \left\|\vec{b}\right\| \neq 0$

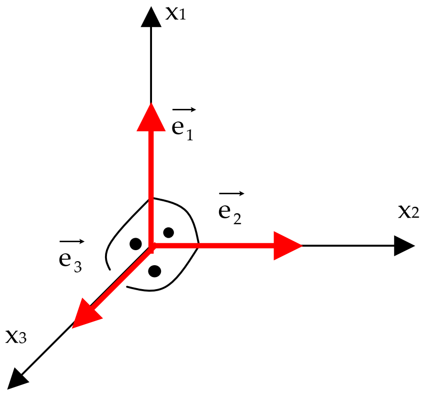
1) $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0$

2) $\varphi \in [0°,90°[\Rightarrow \vec{a} \circ \vec{b} > 0$ *(da $\cos \varphi > 0$)*

$\varphi \in]90°,180°] \Rightarrow \vec{a} \circ \vec{b} < 0$

3 *Koordinatendarstellung des Skalarprodukts*

Betrachte das Skalarprodukt in einem kartesischen Koordinatensystem mit den Basisvektoren $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2} + b_3\vec{e_3}$$

Da $\vec{e_i} \perp \vec{e_k}$ für $i \neq k$ gilt : $\vec{e_i} \circ \vec{e_k} = 0$ und außerdem $\vec{e_i}^{\,2} = 1$

Also:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \left(a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}\right)\left(b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2} + b_3\vec{e_3}\right) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Koordinatenform des euklidischen Skalarprodukts:

Das (euklidische) Skalarprodukt $\vec{a} \circ \vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ des IR^n wird festgelegt durch:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + .. + a_nb_n = r \text{ dabei ist } r \in IR \,.$$

Dadurch wird jeweils zwei Vektoren eine reelle Zahl zugeordnet.
Man erhält also die Summe der Produkte der in den Spalten nebeneinander stehenden Koordinaten.

Weitere Skalarprodukte

Siehe Buch S. 144 f

4 *Der Winkel zwischen zwei Vektoren*

Kürzere Schreibweisen für $\left\|\vec{a}\right\|$: $\left|\vec{a}\right|$ oder a

Aus der Definition des Skalarproduktes in Abschnitt 2 ($\vec{a} \circ \vec{b} = \left\|\vec{a}\right\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cos\varphi$) lässt sich der Winkel ermitteln:

Der Winkel $\varphi \in [0{,}180°]$, für den gilt:

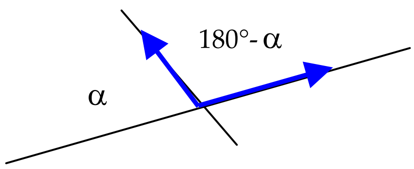
$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}$$

heißt der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$. In Zeichen: $\varphi = \quad (\overrightarrow{a};\overrightarrow{b})$

- *Gibt es immer einen „Schnittpunkt“ in dem ich den Winkel messen kann? Klar! Vektoren sind ja keine Geraden. Immer Fußpunkte zusammenlegen.*
- *Beliebiges Beispiel aus dem R^2 mit nachmessen.*
- *Beliebiges Beispiel aus R^3 mit Standardskalarprodukt*

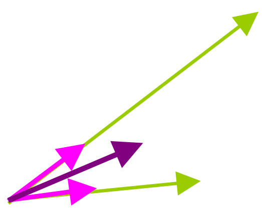
a Schnittwinkel zweier sich schneidender Geraden

Unter dem Schnittwinkel α zweier sich schneidender Geraden versteht man den kleinsten Winkel, den die Geraden miteinander bilden.



Beispiel: *Eine Gerade wünschen lassen, die andere so wählen, dass es einen Schnittpunkt gibt*

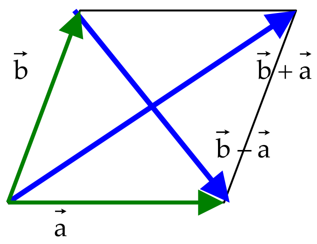
b Winkelhalbierender Vektor



$\underline{\vec{h} = \vec{a}^{\,0} + \vec{b}^{\,0}}$

5 *Anwendungen des Skalarproduktes bei Beweisen*

Satz: Die Diagonalen der Raute sind senkrecht zueinander

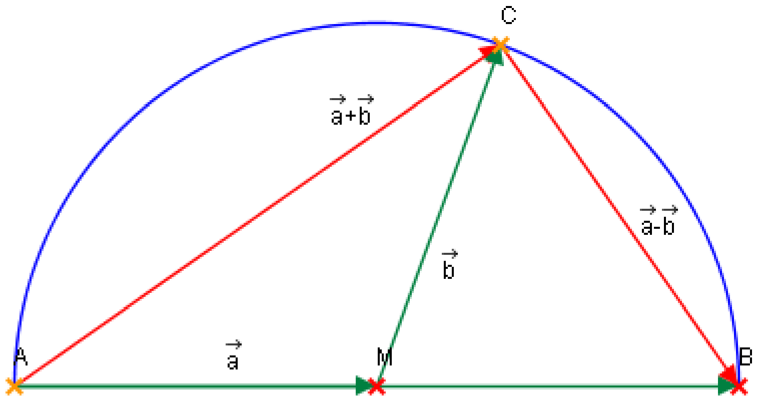


$\text{Vor}: a = b \neq 0$

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\circ\left(\vec{a}-\vec{b}\right) \overset{\text{Distributivgesetz}}{=} \vec{a}\circ\vec{a}-\vec{b}\circ\vec{b} = a^2 - b^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\perp\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$$

Satz von Thales:



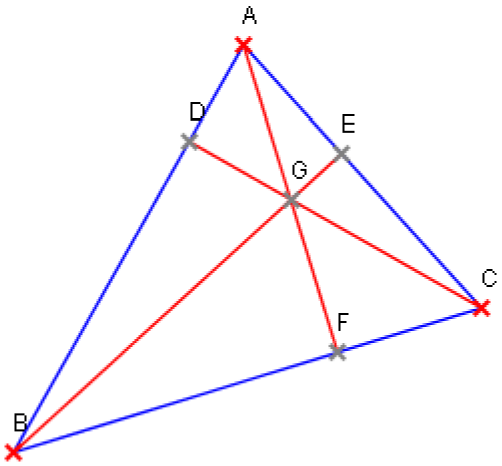
$\text{Vor}: a = b \neq 0$

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\circ\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$$

$$\overset{\text{Distributivgesetz}}{=} \vec{a}\circ\vec{a}-\vec{b}\circ\vec{b} = a^2 - b^2 = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{CB}$$

Satz vom Höhenschnittpunkt:
Die Höhen in einem Dreieck schneiden sich in einem Punkt.



Sei G der Schnittpunkt der Höhe CD und der Höhe BE
=> $\overrightarrow{BG}\circ\overrightarrow{CA} = 0, \overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{CG} = 0$

Wir sind fertig, wenn gezeigt ist: $\overrightarrow{AG}\circ\overrightarrow{CB} = 0$
Für die Faktoren gilt:

$$\overrightarrow{AG}\circ\overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG})\circ(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})$$

$$= \overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}\circ\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BG}\circ\overrightarrow{AB}$$

Wegen Voraussetzung $\overrightarrow{BG}\circ\overrightarrow{CA} = 0$ lässt sich weiter vereinfachen:

$$\overrightarrow{AG}\circ\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}\circ(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}) = \overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{CG} = 0 \text{q.e.d.}$$

Satz des Pythagoras...
S. 153, 1 - 3

Referat: Cauchy-Schwarz-Ungleichung und Dreiecksungleichung

6 Kreis- und Kugelgleichungen

Bisher Beschreibung von Punktmengen über vektorielle Parameterform. Neu: Skalarprodukt und damit Abstand. Punktmengen mit Abstandbeziehung? Kreis, Kugel.

Beispiel:
Welche der folgenden Punkte liegen auf einer Kugel um M (1|1|1) mit Radius 5?
P (5||4|1) Q ($\sqrt{5}+1$ |3|5) R (4|4|4)

$$\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\overrightarrow{MP}\right| = \sqrt{16+9} = 5$$

$$\overrightarrow{MQ} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\overrightarrow{MQ}\right| = \sqrt{5+4+16} = 5$$

$$\overrightarrow{MR} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\overrightarrow{MR}\right| = \sqrt{9+9+9} > 5$$

Somit liegen P und Q auf der Kugel, R liegt außerhalb des Kreises.

Kreis- bzw. Kugelgleichung Sei r der Radius, $\vec{m}$ Ortsvektor des Mittelpunktes M. Für die Punkte X auf K (M,r) gilt: $(\vec{x}-\vec{m})^2 = r^2$

Speziell mit dem Standardskalarprodukt ergibt sich im IR^2 bzw. IR^3

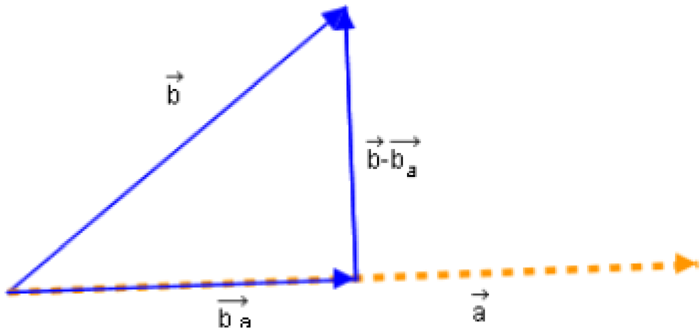
$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2$ bzw. $(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$

Übungen S. 155 f

7 Orthogonalität von Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißen orthogonal (senkrecht zueinander), wenn gilt: $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$.

a Orthogonale Projektion eines Vektors auf einen anderen Vektor



Es gilt: $(\vec{b} - \vec{b}_a) \circ \vec{a} = 0 \Leftrightarrow (\vec{b} - \lambda\,\vec{a}) \circ \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{b} \circ \vec{a} - \lambda\, a^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \vec{b} \circ \vec{a} / a^2$

$\boxed{\Rightarrow \quad \vec{b}_a = \vec{b} \circ \vec{a} / a^2 \cdot \vec{a}}$

Mit normiertem $\vec{a}^{\,0}$: $\boxed{\vec{b}_a = \vec{b} \circ \vec{a}^{\,0} \cdot \vec{a}^{\,0}}$

$\vec{b}_a$ heißt die **orthogonale Projektion** von b auf a.

*	**Beachte:** Der Vektor $\vec{b} - \vec{b}_a$ steht senkrecht auf $\vec{a}$. Dies können wir bei der Gewinnung einer Orthonormalbasis (im folgenden erklärt) einsetzen.

b Orthonormalbasis

Eine Basis eines Vektorraums heißt Orthonormalbasis, wenn alle Vektoren der Basis die Länge 1 haben und paarweise aufeinander senkrecht stehen.

Warum ist eine Orthonormalbasis zu bevorzugen?
Das Skalarprodukt ist grundlegend für die Berechnung von Längen und Winkeln.
Seien $\{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\}$ Basis eines Vektorraumes. Beliebiger Vektor sind dann darstellbar durch

$\vec{v} = k_1 \overrightarrow{b_1} + k_2 \overrightarrow{b_2}$

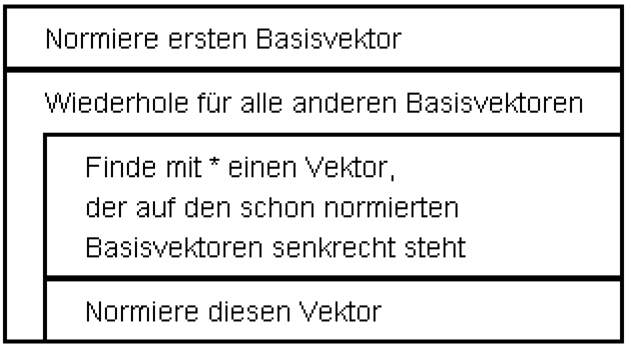
$\vec{w} = l_1 \overrightarrow{b_1} + l_2 \overrightarrow{b_2}$

$\vec{v} \circ \vec{w} = k_1 l_1 \overrightarrow{b_1}^2 + k_2 l_2 \overrightarrow{b_2}^2 + k_1 l_2 \overrightarrow{b_1} \circ \overrightarrow{b_2} + k_2 l_1 \overrightarrow{b_2} \circ \overrightarrow{b_1}$

Dies wird besonders einfach falls gilt:
- $\overrightarrow{b_1} \perp \overrightarrow{b_2}$, denn dann fallen die hinteren beiden Terme weg (Skalarprodukt = 0)
- $\overrightarrow{b_1}^2 = \overrightarrow{b_2}^2 = 1$

Dann lässt sich $\vec{v} \circ \vec{w}$ mittels Standardskalarprodukt berechnen!

Orthonormalisierungsverfahren von E. Schmidt
Geg: Beliebige Basis (n Vektoren)
Ges: Orthonormalbasis



BS 162 /1