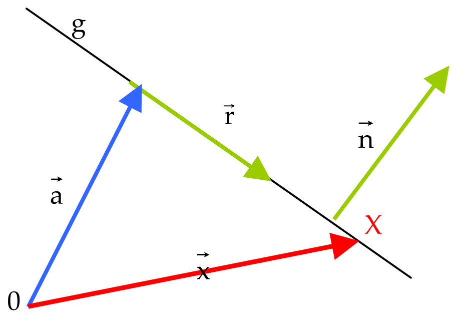
VII Normalenformen

Bekannt als parameterfreie Form aus Kapitel IV.4.5 – jetzt genauer unter die Lupe genommen!

1 Normalengleichung einer Geraden im IR^2

Definition der Normalengleichung der Geraden geht nur im IR^2



Parameterform:
Für die Ortsvektoren x aller Punkte auf g gilt: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{r}$
Normalengleichung:
Für die Ortsvektoren x aller Punkte auf g gilt: $\vec{x} - \vec{a} \perp \vec{n}$, also

$\boxed{(\vec{x} - \vec{a}) \circ \vec{n} = 0}$ (vektorielle Schreibweise)

Beispiel

Normalform der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Allgemein gilt:

$(\vec{x} - \vec{a}) \circ \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = 0$. Damit lässt sich die Gerade auch in der Form schreiben

$$x_1n_1+x_2n_2+\underbrace{a_1n_1+a_2n_2} = 0$$

$$\boxed{x_1n_1+x_2n_2+ \quad n_0 = 0}$$ (Koordinatenschreibweise)

Beispiel

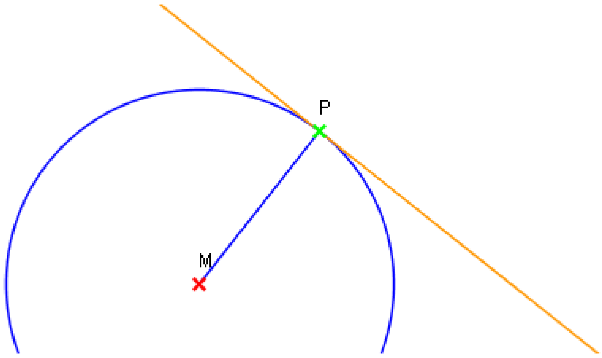
$2x + 3y - 1 = 0$ heißt jetzt $2x_1 + 3x_2 - 1 = 0$. Es ist $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, d.h. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. $\vec{a}$ ist nicht mehr zu ermitteln. Man kann jedoch einen beliebigen Punkt $A \in g$ ermitteln, z.B. A (2|-1) und einen Richtungsvektor, der auf $\vec{n}$ senkrecht steht, z.B. $\vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und kann so eine Punkt-Richtungs-Form der Geraden angeben: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Anwendung

1. Tangente an den Kreis durch einen Punkt auf dem Kreis

Sei $P \in K(M,r)$. Dann gilt für die Tangente an den Kreis $\boxed{(\vec{p}-\vec{m}) \circ (\vec{x}-\vec{p}) = 0}$

Beispiel: Bestimme die Gleichung der Tangente an den Kreis um (2|0) durch(4|2)



$$\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}x_1-4\\x_2-2\end{pmatrix} = 0$$

=> ... => $x_1 + x_2 = 6$

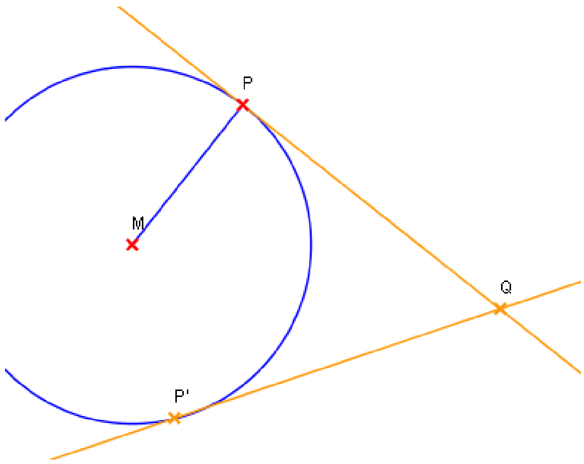
2. Tangente an den Kreis durch einen Punkt außerhalb des Kreises

Hier stößt man zunächst auf die Gleichung $(\vec{p}-\vec{m}) \circ (\vec{q}-\vec{p}) = 0$, bei der $\vec{p}$ blöderweise quadratisch auftritt.

Da bekanntermaßen zusätzlich gilt:

$(\vec{p}-\vec{m})^2 = r^2$, erhält man durch Addition zur ersten Gleichung unter Verwendung des Distributivgesetzes

$\boxed{(\vec{p}-\vec{m}) \circ (\vec{q}-\vec{m}) = r^2}$



Man erhält daraus eine Gleichung für p_1 in Abhängigkeit von p_2. Da P (p_1|p_2) auf dem Kreis liegt, kann man durch Einsetzen dieser Abhängigkeit die Koordinaten bestimmen (2 Lösungen).
Wie unter 1 beschrieben, erhält man daraus die Gleichung der Tangente.

Beispiel: Bestimme die Gleichung der Tangente an den Kreis um (2|0) mit Radius 2 durch(4|2).

$$\begin{pmatrix}p_1-2\\p_2-0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = 4 \Rightarrow p_1 - 2 + p_2 = 2 \Rightarrow p_1 = 4 - p_2$$

$(p_1 - 2)^2 + (p_2 - 0)^2 = 4$

$(2 - p_2 - 4)^2 + (p_2 - 0)^2 = 4$

($p_2 = 0$ und somit $p_1 = 4$) oder ($p_2 = 4$ und somit $p_1 = 0$)

z.B. erster Fall:

$$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}x_1-4\\x_2-0\end{pmatrix} = 0$$

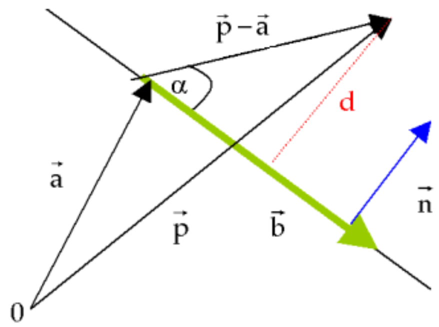
$\Leftrightarrow x_1 = 4$(Parallele zur x_2 – Achse)

...

2 Die Hesse-Normalenform der Geradengleichung

Die folgenden Betrachtungen gelten für Geraden im IR^2, können aber ebenso für Ebenen im IR^3 verwendet werden.
Ziel: Berechnung des Abstandes eines Punktes P von einer Geraden g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$.

$\vec{n}$ ist ein Normalenvektor, der vom Ursprung gesehen in Richtung der Geraden weist.



Es gilt :

1) $(\vec{p}-\vec{a}) \circ \vec{n} = |\vec{n}| \cdot |\vec{p}-\vec{a}| \cos(90° - \alpha)$

2) $|\vec{p}-\vec{a}| \sin \alpha = d$ (d.h d kann negativ werden!)

3) $\cos(90° - \alpha) = \sin \alpha$

Zusammen:

$$d = (\vec{p}-\vec{a}) \circ \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = (\vec{p}-\vec{a}) \circ \vec{n}^0$$

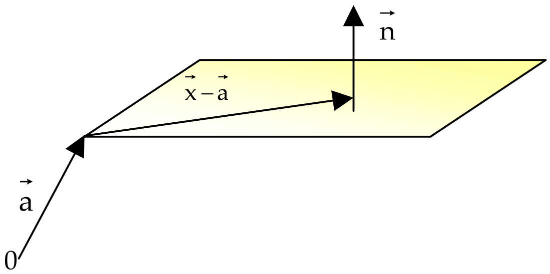
Definition und Zusammenfassung:

1. Aus jeder Normalform $(\vec{x}-\vec{a}) \circ \vec{n} = 0$ lässt sich durch Normierung des Normalenvektors eine Gleichung der Form $\boxed{(\vec{x}-\vec{a}) \circ \vec{n}^0 = 0}$ gewinnen, die man so orientieren kann, dass $\vec{a} \circ \vec{n}^0 \geq 0$.
   Diese besondere Form heißt **Hesse-Normalform (HNF)**
2. Den Abstand eines Punktes von der Geraden erhält man durch Ersetzen von $\vec{x}$ durch den Ortsvektor des Punktes P.
   $\boxed{d(P,g) = (\vec{p}-\vec{a}) \circ \vec{n}^0}$
   d(P,g) > 0 ⇔ P und 0 liegen auf unterschiedlichen Seiten von g
   d(P,g) = 0 ⇔ P liegt auf g
   d(P,g) < 0 ⇔ P und 0 liegen auf der gleichen Seite von g

Bemerkung:
Liegt 0 auf g, so lässt sich die letzte Überlegung offensichtlich nicht anstellen.

3 Normalengleichung und Hesse-Normalenform einer Ebene im IR^3

Analog zu den obigen Betrachtungen lässt sich im IR^3 eine Ebene durch seine Normalengleichung festlegen:



$\boxed{(\vec{x}-\vec{a})\circ\vec{n}=0 \text{ (vektorielle Schreibweise)}}$

$\boxed{x_1n_1+x_2n_2+x_3n_3+n_0=0 \text{ (Koordinatenschreibweise)}}$

Normiert man den Normalenvektor $\vec{n}$ und fordert $\vec{n}^0\circ\vec{a}>0$ so erhält man:

$\boxed{(\vec{x}-\vec{a})\circ\overrightarrow{n^0}=0 \text{ (Hesse-Normal-Form (HNF))}}$

$\boxed{(\vec{p}-\vec{a})\circ\vec{n}^0=d \text{ (Abstand Punkt-Ebene)}}$

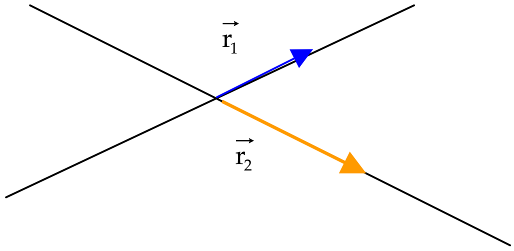
d (P, E) > 0 ⇔ O und P in unterschiedlichen Halbräumen bzgl. E
d (P,E) = 0 ⇔ P liegt auf E
d (P, E) < 0 ⇔ O und P im gleichen Halbraum

Übungen...

4 *Weitere Betrachtungen zu Winkeln*

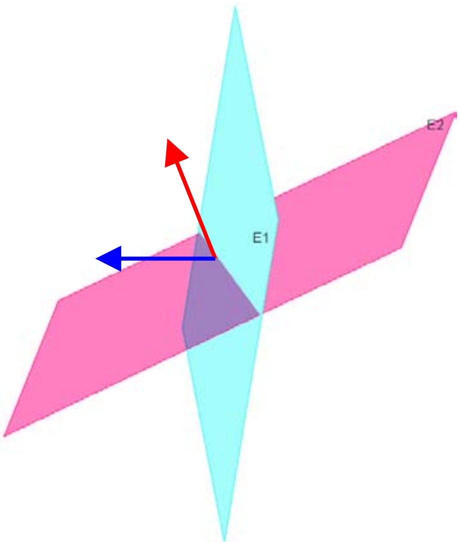
4.1 Schnittwinkel im IR³

Schnittwinkel zweier sich schneidender Geraden:



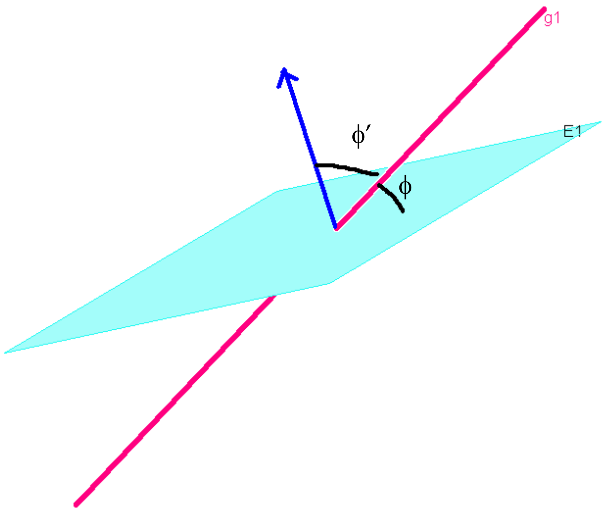
$$\cos\varphi = \left|\frac{\vec{r_1}\circ\vec{r_2}}{r_1 r_2}\right|$$

Schnittwinkel zweier sich schneidender Ebenen:
Der Winkel zwischen den beiden Ebenen ist gleich dem Winkel zwischen den Normalenvektoren auf die Ebenen!



$$\cos\varphi = \left|\frac{\overrightarrow{n_1}\circ\overrightarrow{n_2}}{n_1 n_2}\right|$$

Schnittwinkel zweier sich schneidender Ebenen:
Winkel zwischen Ebene und Gerade = 90° - Winkel zwischen Normalenvektor der Ebene und Richtungsvektor der Gerade

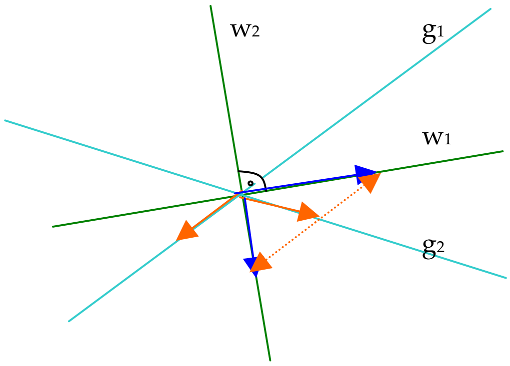


$$\cos\varphi' = \left|\frac{\vec{n}\circ\vec{r}}{nr}\right|, \varphi = 90° - \varphi'$$

oder einfacher wg. cos (90° - ϕ) = sin ϕ

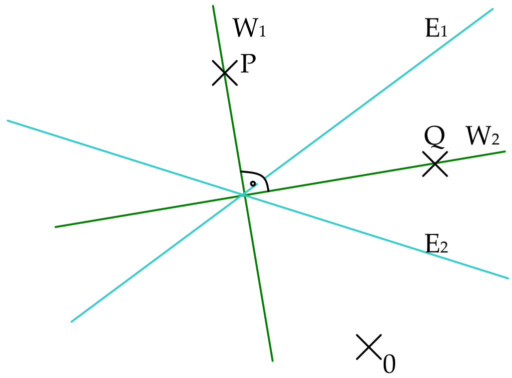
$$\sin\varphi = \left|\frac{\vec{n}\circ\vec{r}}{nr}\right|$$

5 *Winkelhalbierende Gerade bzw. Ebene*



Vorgehen für Geraden:

- Addiere die normierten[1] Richtungsvektoren der Geraden 1 und 2 und erhalte einen Richtungsvektor der winkelhalbierenden Gerade w_1.
- Subtrahiere die normierten Richtungsvektoren der Geraden 1 und 2 und erhalte einen Richtungsvektor der winkelhalbierenden Gerade w_2.
- Bestimme einen Schnittpunkt von g_1 und g_2.
- Gib die Geradengleichungen von w_1 und w_2 an.



Einfacheres Verfahren für Ebenen:
Für die Punkte der Winkelhalbierenden ist der Betrag des Abstands von beiden Ebenen gleich. Eine Abstandsform ergibt sich aus der HNF der Ebene.
Für P gilt: d (P, E_1) > 0, d (P, E_2) > 0, also d (P, E_1) = d (P, E_2)
Für Q gilt: d (Q, E_1) < 0, d (Q, E_2) > 0 , also d (Q, E_1) = -d (Q, E_2)

(Zur Erinnerung:
d (P, E) > 0 ⇔ O und P in unterschiedlichen Halbräumen bzgl. E
d (P,E) = 0 ⇔ P liegt auf E
d (P, E) < 0 ⇔ O und P im gleichen Halbraum)

Beispiel (Abitur 1984):
E_1: $5x_1 - x_3 - 25 = 0$; E_2: $-x_1 + 5x_3 - 19 = 0$

Ermittlung der HNF:
E_1: $\frac{1}{\sqrt{26}}(5x_1 - x_3 - 25) = 0$ E_2: $\frac{1}{\sqrt{26}}(-x_1 + 5x_3 - 19) = 0$

Gleichsetzen der Abstände:
a) d(P, E_1) = d (P, E_2)
$\frac{1}{\sqrt{26}}(5x_1 - x_3 - 25) = \frac{1}{\sqrt{26}}(-x_1 + 5x_3 - 19)$
<=> $6x_1 - 6x_3 - 6 = 0$ <=> $x_1 - x_3 = 1$

b) d(Q, E_1) = -d (Q, E_2)
$\frac{1}{\sqrt{26}}(5x_1 - x_3 - 25) = \frac{1}{\sqrt{26}}(-x_1 + 5x_3 - 19)$
<=> $4x_1 + 4x_2 - 44 = 0$ <=> $x_1 + x_2 - 11 = 0$

(FS S. 88 gemeinsam anschauen!)

[1] Es ist ausreichend, wenn die Vektoren gleich lang sind. Die Normierung stellt hierfür ein einfaches Verfahren dar.

6 *Weitere Abstandsprobleme im IR³*

Bisher: Abstand Punkt – Ebene mit Hilfe der HNF

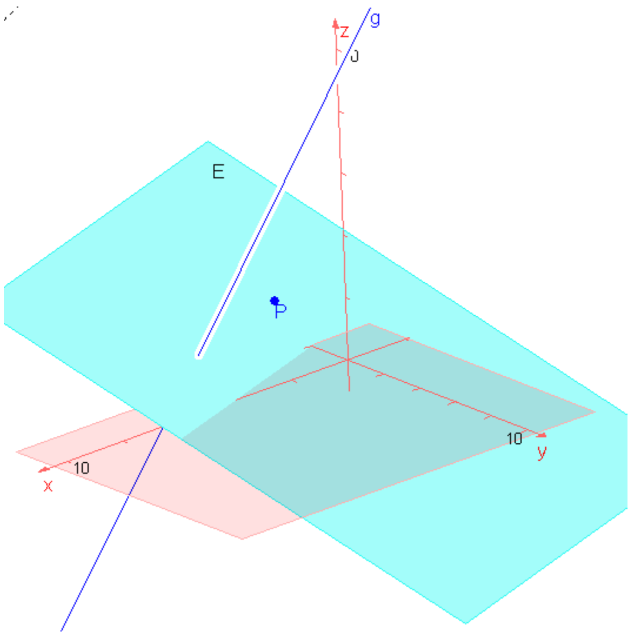
a Abstand von Gerade und Ebene

Geg.: E : $\vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$; g: $\vec{x} = \vec{b} + k \cdot \vec{r}$
Einen Abstand gibt es nur, wenn Ebene und Gerade parallel sind (d.h. $\vec{r} \perp \vec{n}, \vec{r} \circ \vec{n} = 0$)

Vorgehen:
- Zeige Parallelität
- Wähle einen beliebigen Punkt der Gerade
- Bestimme mit der HNF der Ebene den Abstand dieses Punktes von der Ebene.

b Abstand von Punkt und Gerade

Geg: g: $\vec{x} = \vec{b} + k \cdot \vec{r}$, P



Vorgehen:
- Bestimme die Normalenform einer Ebene durch P, die senkrecht auf g steht (einfach, da der Normalenvektor $\vec{r}$ bekannt ist.)
- Bestimme den Schnittpunkt S von Gerade und Ebene.
- Der Abstand von P und S ist der gesuchte Abstand.

Beispiel (in Anlehnung an gk Bayern, Abitur 87/III)

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, P(0|-4|1)

E: $-x_1 + 2x_2 + 4x_3 + c = 0$
Durch Einsetzen von P ergibt sich c = 4
E: $-x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4 = 0$
Einsetzen der Gerade:
-3 + k + 4k + 20 + 16 k + 4 = 0 => k = - 1 => (in g einsetzen) S (4|-2|1)
d (g, P)= $\sqrt{(4-0)^2 + (-2-(-4))^2 + (1-1)^2} = \sqrt{20}$

c Abstand parallele Geraden

Vorgehen:
- Prüfe Kollinearität der Richtungsvektoren
- Wähle einen beliebigen Punkt auf einer der Geraden.
- Verfahre weiter wie bei b.

d Abstand windschiefer Geraden

Geg: g: $\vec{x} = \vec{a} + k \cdot \vec{r}$, h: $\vec{x} = \vec{b} + k \cdot \vec{s}$,
Zwei windschiefe Geraden haben genau eine gemeinsame Lotgerade. Der Abstand der Schnittpunkte der Geraden ist der Abstand der Geraden.

Vorgehen:

- Ermittle einen Normalenvektor zu $\vec{r}$ und $\vec{s}$.
- Gib unter Verwendung des Normalenvektors eine Ebene E an, die g enthält .
- Ermittle den Abstand der Geraden h von der Ebene E wie bei a.

Beispiel:
A (1|2|3), B(5|0|-1), C(2|3|-1), D(6|7|1)
Bestimme den Abstand der Geraden AB von CD.
Ergebnis: 3