LK Mathematik 11 – 1. Schulaufgabe in 12/1 – 24.10.2003

Stochastik

1. *(7 BE)* Begründen Sie für beliebige Ereignisse A, B in einem Ergebnisraum Ω die Richtigkeit der Formel
   $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A) + P(A \cap \overline{B})$.

2. Fred, Gerd und Hans spielen in einer Volleyballmannschaft. Die Ereignisse seien wie folgt definiert:
   F: „Fred erscheint beim Training.“, G und H analog.
   a) *(12 BE)* Freds Abwesenheitsquote beim Training beträgt 30%, die von Gerd 20%. In 95% der Fälle ist mindestens einer der beiden anwesend. Drücken Sie folgende Ereignisse möglichst kurz durch F und G aus und bestimmen Sie ihre Wahrscheinlichkeiten:
   A: „Beide sind nicht da.“
   B: „Mindestens einer der beiden fehlt.“
   C: „Entweder Fred oder Gerd fehlt.“

   b) *(8 BE)* Die Anwesenheitsquote von Hans beträgt 35%, aber er ist nie da, wenn Fred und Gerd zusammen erscheinen. Formulieren Sie das Ereignis $\overline{H} \cap (\overline{F \cap G})$ und berechnen Sie seine Wahrscheinlichkeit.

   c) *(6 BE)* Drücken Sie folgende Ereignisse möglichst kurz durch F, G und H aus:
   X: „Höchstens einer der drei fehlt.“
   Y: „Genau zwei der drei sind da.“
   Z: „Mindestens einer der drei ist da.“

Analysis

3. *(8 BE)* $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2} + \frac{1}{3}\sin(3x)$
   Bestimmen Sie zu f eine Stammfunktion F, deren Graph den Punkt $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ enthält!

4. Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit ihren Graphen G_k.
   $f_k(x) = x - \frac{1}{k^2}x^3 \quad (k \quad {}^{+})$
   a) *(14 BE)* Untersuchen Sie die Schar auf Symmetrie, Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte! Geben Sie die Ortskurve der Hoch- und Tiefpunkte an!

   b) *(8 BE)* P_k ist eine Schar von Parabeln mit folgender Eigenschaft:
   Jede Parabel P_k hat mit dem Graphen G_k eine gemeinsame Tangente im Ursprung sowie eine weitere gemeinsame Nullstelle im positiven x-Bereich.
   Bestimmen Sie den Funktionsterm $p_k(x)$! (**Ergebnis**: $p_k(x) = x - \frac{1}{k}x^2$)

   c) *(7 BE)* Fertigen Sie eine saubere Zeichnung von P_4 und G_4 in einem gemeinsamen Koordinatensystem! (LE 2cm, $-2 \leq x \leq 5$)

   d) *(10 BE)* G_k schließt mit der x-Achse ein Flächenstück im ersten Quadranten ein, das von P_k geteilt wird. Bestimmen Sie das Verhältnis der beiden Teilflächen in Abhängigkeit von k!

80 Bewertungseinheiten (BE) Viel Erfolg und anschließend erholsame Ferien!

Stochastik

1.

$P(\overline{A}\cap B) = 1 - P(\overline{\overline{A}\cap B})$

$= 1 - P(A \quad \overline{B})$

$= 1 - P(A) - P(\overline{B}) + P(A\cap\overline{B})$

$= P(B) - P(A) + P(A\cap\overline{B})$.

2.

a

	F	$\overline{F}$	
G	55%	25%	80%
$\overline{G}$	15%	5%	20%
	70%	30%	

$P(A) = P(\overline{F}\cap\overline{G}) = 5\%$

$P(B) = P(\overline{F} \quad \overline{G}) = 45\%$

$P(C) = P((F\cap\overline{G}) \quad (\overline{F}\cap G)) = 40\%$

b.

$\overline{H}\cap(\overline{F\cap G})$: Hans fehlt und Fred und Gerd sind nicht gleichzeitig da.

	$F\cap G$	$\overline{F\cap G}$	
H	0%	35%	35%
$\overline{H}$	55%	10%	65%
	55%		

c.

$X = (F\cap G) \quad (F\cap H) \quad (G\cap H)$

$Y = (F\cap G\cap\overline{H}) \quad (F\cap H\cap\overline{G}) \quad (G\cap H\cap\overline{F})$

$Z = F \quad G \quad H$

3. $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2} + \frac{1}{3}\sin(3x) = 1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{3}\sin(3x)$

=> $F_c(x) = x - \frac{2}{x} - \frac{1}{9}\cos(3x) + c$

$F_c\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ => $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} - \frac{1}{9}\cos 3 \cdot \frac{\pi}{2} + c = \frac{\pi}{2} \Rightarrow c = \frac{4}{\pi}$

4. $f_k(x) = x - \frac{1}{k^2}x^3 \quad (k \quad ^{+})$

a)
- Punktsymmetrie, da $f_k(-x) = -f_k(x)$
- Nullstellen:

  $f_k(x) = 0 \Rightarrow x(1 - x^2/k^2) = 0$

  => $x_1 = 0,\ x_{2,3} = \pm k$

  Extrema:

  $f'(x) = 1 - 3x^2/k^2 \Rightarrow x_{4/5} = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}k$

  $f''(x) = -6x/k^2$

  => $f''(x_4) < 0 \Rightarrow$ HoP $\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}k; \frac{2}{9}\sqrt{3}k\right)$

  und aus Symmetriegründen TiP $\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}k; -\frac{2}{9}\sqrt{3}k\right)$
- WeP (0,0) aus Punktsymmetrie/$f''(x) = 0$
- Ortskurven: $k(x) = \sqrt{3}x \Rightarrow y = \frac{2}{9}\sqrt{3}k = \frac{2}{3}x$

b)

$p_k(x) = ax^2 + bx + c$

$p_k'(x) = 2ax + b$

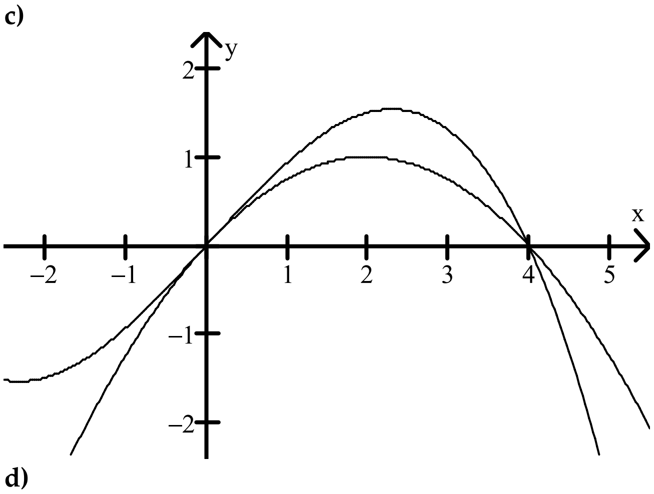
$p_k'(0) = f_k'(0) \Leftrightarrow b = 1$

$p_k(0) = f_k(0) \Leftrightarrow c = 0$

$p_k(k) = f_k(k) = 0 \Rightarrow ak^2 + k = 0 \Rightarrow (k \neq 0)\ a = -1/k$

=> $p_k(x) = x - \frac{1}{k}x^2$

c)



d)

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^x f_k(t)dt &= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4k^2} + c \overset{\text{mit } x=0}{\Rightarrow} c = 0 \Rightarrow A_1 = \int_0^k f_k(t)dt = \frac{k^2}{2} - \frac{k^4}{4k^2} = \frac{k^2}{4} \\
\int_0^x p_k(t)dt &= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3k} + c' \overset{\text{mit } x=0}{\Rightarrow} c' = 0 \Rightarrow A_2 = \int_0^k p_k(t)dt = \frac{k^2}{2} - \frac{k^3}{3k} = \frac{k^2}{6}
\end{aligned}\right\} \frac{A_1 - A_2}{A_1} = \frac{1}{2}$$