LK Mathematik 11 – 2. Schulaufgabe in 12/1 – 20.01.2004

Stochastik

1) Der Schüler A aus dem Mathekurs kann sich nie erinnern, ob Stochastik (zweimal pro Woche) oder Analysis (einmal pro Woche) in der nächsten Mathematikstunde behandelt wird. Anstatt beide Bücher einzupacken, zieht er zufällig eines aus seinem Regal. Die Wahrscheinlichkeit für das Stochastikbuch ist dabei 30%, für das Analysisbuch 15%. Zieht er eines aus einem anderen Fach, so entscheidet er sich dazu, gar kein Mathebuch mitzunehmen.
   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P, dass A das richtige Mathe-Buch einsteckt? [Falls nicht gelöst, rechne mit P = 25%]
   b) Wie viele Stunden muss der Lehrer mindestens warten, bis der Schüler mit einer Wahrscheinlichkeit von über 96% mindestens **zweimal** das richtige Buch dabei hat?

2) Schüler C hat ein Religionsbuch, drei Mathebücher, vier Physik- und zwei Englischbücher. Da die Zeit am Morgen drängt, packt er wahllos drei der Bücher in die Schultasche. Berechnen Sie mit Hilfe der Kombinatorik die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er
   a) mindestens zwei Mathematikbücher
   b) genau zwei beliebige Bücher für eines der Fächer

   dabei hat?

3) Wie bereits erwähnt, hat der Kurs zweimal pro Woche Stochastik. Die Wahrscheinlichkeit, dass man in Stochastik die Formelsammlung braucht, liegt bei 80%, in Analysis bei 40%. Der Schüler D weiß zu Beginn einer Stunde nicht, welches Gebiet behandelt wird, er wird aber aufgefordert, die Formelsammlung aufzuschlagen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er unter dieser Bedingung Stochastik?

Analysis

4) Gegeben seien die Funktionen f: $x \to -\frac{1}{3}x^3 + 3x$ und g: $x \to \frac{5}{6}x^2$, jeweils mit Definitionsbereich .
   a) Untersuchen Sie die Funktion f auf Symmetrie, Nullstellen, lokale Extrempunkte, Wendepunkte und Verhalten für $x \to \pm\infty$!
   b) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f in einem Koordinatensystem mit x [-4; 4]; y [-5; 5] unter Verwendung der in Teilaufgabe a) gewonnenen Erkenntnisse. Zeichnen Sie auch den Verlauf des Graphen zu g ein!
   c) Ermitteln Sie rechnerisch die Schnittpunkte der Graphen von f und g! (Teilergebnis: $(2 | \frac{10}{3})$)
   d) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden h, die durch die beiden Schnittpunkte mit nichtnegativen x-Koordinaten von f und g verläuft. Zeichnen Sie den Graphen von h in Ihr Koordinatensystem ein!
   e) Die Fläche, die im positiven x-Bereich von G_f und G_g eingeschlossen wird, wird von G_h geteilt. Bestimmen Sie die Inhalte der Teilflächen und daraus das Verhältnis der Teilflächen.
   f) Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn die Fläche, die vom Graphen von g und der x-Achse zwischen x = 1 und x = 3 eingeschlossen wird, um die x-Achse rotiert.

Aufgabe	1a	b	2a	b	3	4a	b	c	d	e	f	Gesamt
Bewertungseinheiten	4	12	6	6	8	12	7	6	3	7	3	74

Alle Antworten sind zu begründen oder mit Rechnungen zu belegen!

Guten Erfolg!

1. a)
E: „Schüler bringt richtiges Buch mit“
P (E) = 2/3 · 30% + 1/3 · 15 % = 25 %

b)
F: Schüler bringt bei n Versuchen mindestens zweimal das richtige Buch mit
P (F) ≥ 0,96
$\overline{F}$: Schüler bringt bei n Versuchen höchstens einmal das richtige Buch mit
P ($\overline{F}$) ≤ 0,04
$0{,}75^n + n \cdot 0{,}75^{n-1} \cdot 0{,}25 \leq 0{,}04$
Durch Ausprobieren mit dem Taschenrechner ergibt sich: n = 18

2) a)

$$\frac{\binom{3}{2}\binom{7}{1}+\binom{3}{3}\binom{7}{0}}{\binom{10}{3}} = 18{,}3\%$$

b)

$$\frac{\binom{3}{2}\binom{7}{1}+\binom{4}{2}\binom{6}{1}+\binom{2}{2}\binom{8}{1}}{\binom{10}{3}} = 54{,}2\%$$

3. S: „Stochastik“; F: „Formelsammlung wird benötigt“
$P_S(F) = 80\%$; $P\ \ {}_S(F) = 40\%$; P (S) = 2/3
Ges: P_S (F)

$$P_F(S) = \frac{P(S)\cdot P_S(F)}{P(S)\cdot P_S(F) + P(\overline{S})\cdot P_{\overline{S}}(F)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot 0{,}8}{\frac{2}{3}\cdot 0{,}8 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}4} = 0{,}8$$

4.

a. **Symmetrie:** f (-x) = -f (x), also ist f punktsymmetrisch zum Ursprung.

Nullstellen: $f(x) = -\frac{1}{3}x(x^2 - 9) = -\frac{1}{3}x(x-3)(x+3)$ => Nullstellen $x_1 = 0$; $x_{2/3} = \pm 3$

lokale Extrema: $f'(x) = -x^2 + 3$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x_{4/5} = \pm\sqrt{3}$

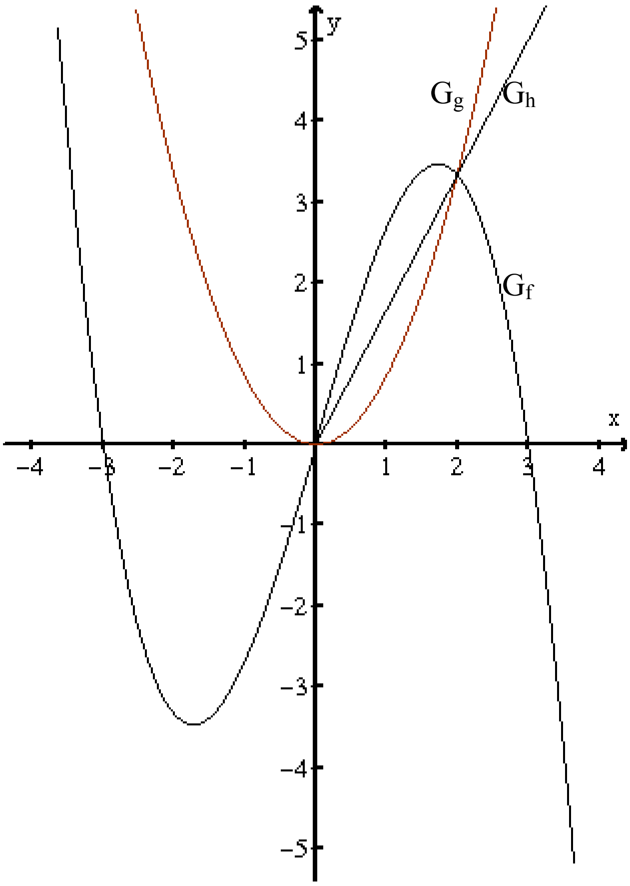
$f''(x) = -2x$; $f''(\sqrt{3}) < 0 \Rightarrow$ HoP $(\sqrt{3}; f(\sqrt{3})) = (\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$; aus Symmetriegründen TiP $((-\sqrt{3}; -2\sqrt{3})$

Wendepunkte: $f''(x) = 0$ für $x = 0$; $f'''(0) = -2$; $f(0) = 0 \Rightarrow$ WeP (0; 0)

Verhalten im Unendlichen:

$\lim_{x\to\pm\infty}(-\frac{1}{3}x^3 + 3x) = \mp\infty$

b.



c. $f(x_s) = g(x_s) \Rightarrow -1/3\, x_s^3 - 5/6\, x_s^2 + 9\, x_s = 0 \Rightarrow x_s\,(-1/3\, x_s^2 - 5/6\, x_s + 9) = 0$

$\Rightarrow x_{s1} = 0;\ x_{s2} = 2;\ x_{s3} = -9/2$

$\Rightarrow y_{s1} = 0;\ y_{s2} = 10/3;\ y_{s3} = 135/8$

d. G_h verläuft durch (0; 0), also Ursprungsgerade. $h(2) = 10/3 = m \cdot 2 \Rightarrow h(x) = 5/3\,x$

e. $A_1 = \int_0^2 f(x) - h(x)\,dx = \int_0^2 -\frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x\,dx = \left[-\frac{1}{12}x^4 + \frac{4}{6}x^2\right]_0^2 = \frac{4}{3}$

$A_2 = \int_0^2 h(x) - g(x)\,dx = \int_0^2 \frac{5}{3}x - \frac{5}{6}x^2\,dx = \left[\frac{5}{6}x^2 - \frac{5}{18}x^3\right]_0^2 = \frac{10}{9}$

$\Rightarrow A_1 : A_2 = 6 : 5$

f. $\int_1^3 g^2(x)\pi\,dx = \int_1^3 \frac{25}{36}x^4\pi\,dx = \pi\left[\frac{5}{36}x^5\right]_1^3 = 33\frac{11}{18}\pi$