LK Mathematik 11 – 2. Schulaufgabe in 12/1 – 30.04.2004

Analysis

1. (④/⑥/②/⑤/⑤/⑤) Gegeben ist die Funktion $f: x \to 2e^x - (e^x)^2$ mit maximalem Definitionsbereich D_f.
   a) Bestimmen Sie die Nullstelle und untersuchen Sie das Verhalten am Rand von D_f.
   b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f und geben Sie Lage und Art des Extrempunkts an.
   c) Geben Sie aufgrund bisheriger Befunde die Wertemenge von f an (kurze Begründung).
   d) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von f und geben Sie die Koordinaten des Wendepunkts an.
   e) Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen von f unter Berücksichtigung der bisher ermittelten Ergebnisse für $-6 < x < 1{,}3$.
   f) Berechnen Sie den Flächeninhalt A(s) im zweiten Quadranten zwischen dem Graphen von f, der y-Achse, der x-Achse und der Geraden $x = s$ (mit $s < 0$). Berechne Sie $\lim\limits_{s \to -\infty} A(s)$.

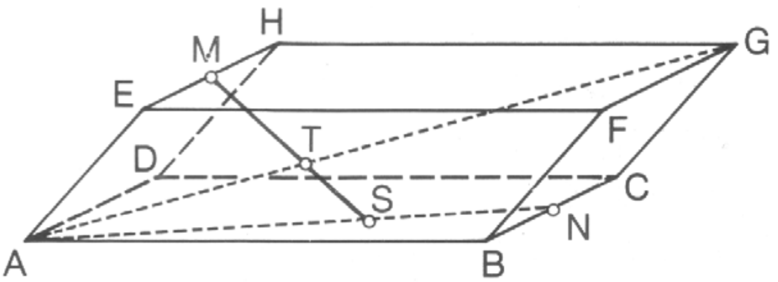
Geometrie

2. ⑩ Bestimmen Sie, für welches $k \in \mathbb{R}$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} kx_1 + 2x_3 &= -3 \\ k^2x_1 + kx_2 + x_3 &= k \\ 4kx_1 + kx_2 + 6x_3 &= -6 \end{aligned}$$

   keine Lösung, genau eine Lösung, unendlich viele Lösungen besitzt.

3. ⑩ Betrachtet werden soll folgender Spat:



   Es sei $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ und $\overrightarrow{AE} = \vec{c}$. Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Strecke [EH], der Punkt N ist der Mittelpunkt der Strecke [BC], für T gilt: $\overrightarrow{AT} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AG}$.

   Berechnen Sie k für: $\overrightarrow{AS} = k \cdot \overrightarrow{AN}$

Stochastik

4. (Je ③) In einem Kurs versuchen vier Schüler, durch Würfeln ihre nächste Schulaufgabennote vorherzusagen. Dabei würfelt jeder der Schüler S_1, S_2, S_3, S_4 eine der Noten von 1 bis 6 mit gleicher Wahrscheinlichkeit.
   a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
      E_1 := „Alle Schüler erwürfeln die gleiche Zensur."
      E_2 := „Schüler S_4 erwürfelt die Note 1."
   b) Überprüfen Sie die Ereignisse aus a) auf Unabhängigkeit.
   c) Beschreiben Sie das Ereignis $\overline{E_1} \cap \overline{E_2}$ in einem Satz und berechnen Sie seine Wahrscheinlichkeit.
   d) Schüler S_1 glaubt an die magische Kraft des Würfels und möchte so lange würfeln, bis er eine 1 erwürfelt. Wie oft muss er sich mindestens vornehmen zu würfeln, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 97% eine 1 erwürfelt zu haben?

Viel Erfolg!

Gesamtpunktzahl: 58

LK Mathematik 11 – 2. Schulaufgabe in 12/1 – 30.04.2004 Musterlösung

1. $f(x) = 2e^x - (e^x)^2$ $D_f = \mathbb{R}$.

a) $e^x(2 - e^x) = 0 \overset{e^x \neq 0}{=>} e^x = 2 => x = \ln 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (2e^x - (e^x)^2) = \lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{e^x}_{\to +\infty} \underbrace{(2 - e^x)}_{\to -\infty} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (2e^x - (e^x)^2) = \lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{e^x}_{\to 0} \underbrace{(2 - e^x)}_{\to 2} = 0$

b)

$f'(x) = 2e^x - 2(e^x)^2 = 2e^x(1 - e^x)$

$f'(x) = 0 \overset{2e^x \neq 0}{\Leftrightarrow} e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Vorzeichenuntersuchung der 1. Ableitung:

x	<0	=0	>0
f'(x)	>0	=0	<0
G_f	steigt	HoP	fällt

f(0)=1 => HoP (0|1)

c) Wegen der Grenzwerte, des Monotonieverhaltens, der Stetigkeit und des Maximums folgt:
$W_f =]-\infty;1]$

d)

$f''(x) = 2e^x - 4(e^x)^2 = 2e^x(1 - 2e^x)$

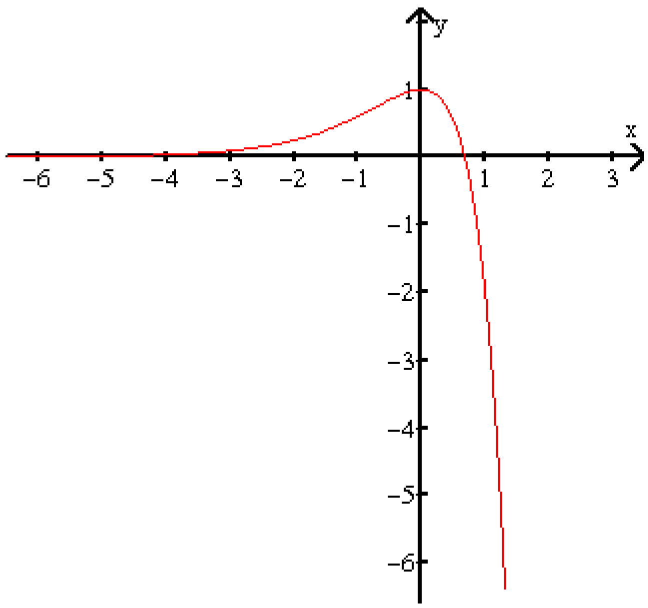
$f''(x) = 0 \overset{2e^x \neq 0}{\Leftrightarrow} e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln\frac{1}{2}(= -\ln 2) \approx -0{,}7$

f (-ln 2) = ¾

x	<-ln(2)	= -ln(2)	> -ln(2)
f''(x)	>0	=0	<0
G_f	linksgekrümmt	WeP	rechtsgekrümmt

=> WeP (-ln 2; ¾)

e)



f)

$A(s) = \int_s^0 2e^x - (e^x)^2 dx = \left[2e^x - \frac{1}{2}(e^x)^2\right]_s^0 = 1{,}5 - (2e^s - \frac{1}{2}(e^s)^2)$

$\lim\limits_{s \to -\infty} A(s) = 1{,}5$

2.) $\begin{vmatrix} k & 0 & 2 \\ k^2 & k & 1 \\ 4k & k & 6 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} k & 1 \\ k & 6 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} k^2 & k \\ 4k & k \end{vmatrix} = 5k^2 + 2k^3 - 8k^2 = k^2(2k-3)$

Gleichungssystem eindeutig lösbar ⇔ Determinante $\neq 0$ ⇔ $k \neq 0; 3/2$

k=0: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ unlösbar!

k= 3/2: $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4} \\ 6 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{3}{2} \\ -6 \end{pmatrix}$

Offenbar sind der 2. und 3. Spaltenvektor linear unabhängig, wegen der Determinante muss der 1. davon linear abhängig sein. Es bleibt zu prüfen, ob

$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 6 & -6 \end{vmatrix} = 0$. Nachrechnen: $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 6 & -6 \end{vmatrix} \overset{\text{III}-\text{II}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 5 & -\frac{15}{2} \end{vmatrix} \underset{\text{1.Spalte}}{\overset{\text{Entw.nach}}{=}} -\frac{3}{2}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -\frac{15}{2} \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}(-15+15) = 0$

Der Vektor der rechten Seite ist also linear abhängig vom 2. und 3. Spaltenvektor, es gibt also unendlich viele Lösungen.

3. Nullsumme:

$\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TS} + \overrightarrow{SA} = \vec{0} \Rightarrow \frac{1}{3}\overrightarrow{AG} + m \cdot \overrightarrow{MT} - \overrightarrow{AS} = \vec{0}$

$\Rightarrow \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + m \cdot (-\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}) - k\overrightarrow{AN} = \vec{0}$

$\Rightarrow \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + m \cdot (-\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} + \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})) - k(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}) = \vec{0}$

$\Rightarrow (\frac{1}{3} + \frac{1}{3}m - k)\vec{a} + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6}m - \frac{1}{2}k)\vec{b} + (\frac{1}{3} - \frac{2}{3}m)\vec{c} = \vec{0}$

$\Rightarrow m = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

4.

a) $p_1 = 6 \cdot (1/6)^4 = 1/216$; $p_2 = 1/6$

b) $p(E_1 \cap E_2) = (1/6)^4 = p_1 \cdot p_2$ => Die Ereignisse sind unabhängig.

c) Nicht alle Zensuren sind gleich und S_4 würfelt keine 1.

Mit E_1 und E_2 sind auch $\overline{E_1}$ und $\overline{E_2}$ unabhängig. $p(\overline{E_1} \cap \overline{E_2}) = p(\overline{E_1}) \cdot p(\overline{E_2}) = 1075/1296$

d) $1 - (5/6)^n > 0{,}97 \Rightarrow (5/6)^n < 0{,}03 \Rightarrow n \ln(5/6) < \ln 0{,}03 \Rightarrow n \geq 20$