LK Mathematik 11 – 2. Schulaufgabe in 12/2 – 29.06.2004

Aufgabe 1: Analysis (⑤/③/⑥/⑥/②/⑤/⑥; zusammen: 33 BE)

Gegeben ist die Schar von Funktionen mit der Gleichung $f_k(x) = \frac{\ln x + k}{x}$, $k \in IR^+$.

a) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktionenschar f_k an! Ermitteln Sie das Verhalten der Funktion an den Rändern von D_{fk}!
b) Bestimmen Sie vorhandene Nullstellen!
c) Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung! (Teilergebnis: $f_k''(x) = \frac{2\ln x - 3 + 2k}{x^3}$)
d) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f_k und geben Sie Lage und Art des Extrempunkts in Abhängigkeit von k an!
e) Bestimmen Sie die Gleichung der Ortskurve aller Hochpunkte!
f) Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunkts! (Nachweis nach Möglichkeit ohne 3. Ableitung)
g) Zeichnen Sie die Graphen von f_0 und f_2 im Intervall]0;4]!

Aufgabe 2: Geometrie (⑤/⑤/⑥/⑥; zusammen: 22 BE)

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben ($\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in IR$)

a) Bestimmen Sie alle Schnittpunkte der Geraden g mit den Koordinatenebenen (Spurpunkte).
b) Untersuchen Sie die Lage von E und g (ohne Umwandlung der Ebene in Koordinatenform!). Ermitteln Sie gegebenenfalls die Schnittmenge!
c) Lösen Sie mit Hilfe geeigneter Determinanten: Für welches k ist die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} k^2 \\ k-1 \\ 3 \end{pmatrix}$ parallel zu E? Liegt h dann in der Ebene E?
d) Ermitteln Sie die Gleichung der Ebene E′, die durch die Antragspunkte der Ebene E und der Geraden g und h festgelegt ist, in Parameterform und Koordinatenform!

Aufgabe 3: Stochastik (④/④/③; zusammen: 11 BE)

Ein Schütze gibt wiederholt drei Schüsse auf ein Ziel ab. Bei jedem Schuss trifft er mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,6. Die Zufallsgröße X bezeichne die Anzahl der Treffer.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße an!
b) Stellen Sie die kumulative Verteilungsfunktion der Zufallsgröße graphisch dar!
c) Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße!

Viel Erfolg!

Gesamtpunktzahl: 66

Aufgabe 1:

a) $D_{f_k} = \mathbb{R}^+$; $\lim_{(x \to 0+)} f_k(x) = -\infty$; $\lim_{(x \to +\infty)} f_k(x) = 0$ (L'Hôpital);

b) $f_k(x_N) = 0 \Leftrightarrow \ln x_N + k = 0 \Leftrightarrow \ln x_N = -k \Leftrightarrow x_N = e^{-k}$

c) $f_k'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} + (\ln x + k)(-x^{-2}) = \dfrac{-\ln x + 1 - k}{x^2}$

$f_k''(x) = -\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^3}(-\ln x + 1 - k) = \dfrac{2\ln x - 3 + 2k}{x^3}$

d) $f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1-k \Leftrightarrow x = e^{1-k}$

$f_k``(e^{1-k}) = \dfrac{2(1-k) - 3 + 2k}{(e^{1-k})^3} < 0$

Somit liegt für alle k ein Maximum vor, woraus sich das Monotonieverhalten ergibt.

$f(e^{1-k}) = 1/e^{1-k}$

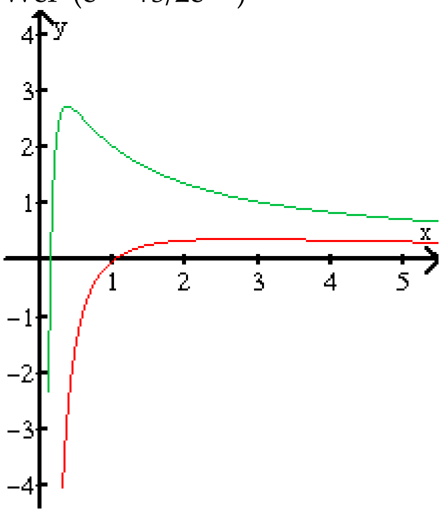
Max $(e^{1-k}; 1/e^{1-k})$

e) $y = 1/x$

f) $f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{(3-2k)/2}$, dort Vorzeichenwechsel der 2. Ableitung, also Wendepunkt.

$f(e^{(3-2k)/2}) = 3/2e^{(3-2k)/2}$

WeP $(e^{3-2k} \mid 3/2e^{3-2k})$



Aufgabe 2:

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) x_1-x_2-Ebene: $x_3 = 0 \Rightarrow \lambda = -3; \Rightarrow P_3\,(4 \mid 1 \mid 0)$
x_1-x_3-Ebene: $x_2 = 0 \Rightarrow \lambda = -4; \Rightarrow P_2\,(5 \mid 0 \mid -1)$
x_2-x_3-Ebene: $x_1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1; \Rightarrow P_1\,(0 \mid 5 \mid 4)$

b) An der zweiten Koordinate erkennt man die lineare Unabhängigkeit des Richtungsvektors der Geraden von den Richtungsvektoren der Ebene. Somit gibt es einen Schnittpunkt. Gleichsetzen führt auf

$$\lambda_1\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$$

Aus der zweiten Zeile sieht man direkt $\lambda = -3$. Aus a) ergibt sich die Schnittmenge $\{P_3\,(4|1|0)\}$.

c) $\begin{vmatrix}-3 & 2 & k^2\\ 0 & 0 & k-1\\ 2 & 3 & 3\end{vmatrix} \overset{\text{Entw.nach2.Zeile}}{=} -(k-1)(-9-4) = 0$ für $k = 1$, also parallel für $k = 1$. Man prüft nun, ob der Verbindungsvektor der Aufpunkte von den Richtungsvektoren der Ebene linear abhängig ist:

$\begin{vmatrix}-3 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 8\end{vmatrix} \overset{\text{Entw.nach2.Zeile}}{=} 0$. Somit liegt die Gerade h in der Ebene.

d) Parameterform: $E' : \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\1\\5\end{pmatrix}+\lambda_1\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}-1\\0\\-8\end{pmatrix}$

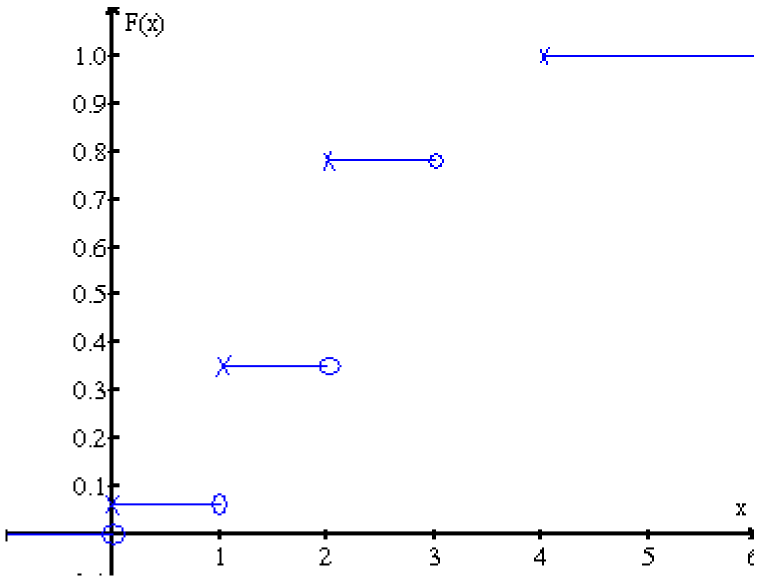
$2 \cdot (II) - 3 \cdot (I)$: $2x_2 - 3x_1 = 5 + 3\lambda_2$ (II')

$(III) + (I)$: $x_1 + x_3 = 4 + 9\lambda_2$ (III')

$3 \cdot (II') + (III')$ $-8x_1 + 6x_2 + x_3 = 19$

Aufgabe 3:

x	0	1	2	3
P(X = x)	$0{,}4^3 = 6{,}4\%$	$3 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6 = 28{,}8\%$	$3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^2 = 43{,}2\%$	$0{,}6^3 = 21{,}6\%$



$E(X) = 0 \cdot 6{,}4\% + 1 \cdot 28{,}8\,\% + 2 \cdot 43{,}2\% + 3 \cdot 21{,}6\,\% = 1{,}8$