LK M11 – 2. Schulaufgabe in 13/1 – 11.1.05

1. Analytische Geometrie

Gegeben sind folgende Punkte des IR^3: $A(1|0|-1)$; $B(-2|3|2)$; $C(7|-15|11)$, $S_k\,(1|2k|3)$

a) ③ Beschreiben Sie möglichst genau die Lage aller Punkte S_k .

b) ④ Bestimmen Sie $k \in IR$ so, dass gilt: $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{S_k B}$. [Kontrollergebnis: k = 2,5] Im Folgenden wird $S_{2,5}$ abgekürzt durch: $S_{2,5} = S$.

c) ④ Bestimmen Sie auf Grad genau den Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AB}$.

d) ⑦ Bestimmen Sie den Fußpunkt F des Lots von C auf die Gerade AB. [Kontrollergebnis: $F(4|-3|-4)$]

e) ④ Bestimme Sie den Flächeninhalt A des Dreiecks ABC [Kontrollergebnis: $A = \sqrt{2551{,}5}$ FE]

f) ③ Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide ABCS (mit S aus 1b).

g) ③ B liegt auf einer Kugel um A. Geben Sie eine möglichst einfache Gleichung an, die die Koordinaten der Punkte erfüllen, die auf dieser Kugel liegen.

h) ⑤ Geben Sie die Gleichung der Ebene durch A, B und C in Normalenform an und ermittle den Abstand des Koordinatenursprungs von der Ebene.

2. Infinitesimalrechnung

Gegeben ist eine Funktion f durch $f(x) = \dfrac{\frac{1}{2}x^2}{e^{\frac{1}{2}x}}$ (x)

a) ⑭ Ermitteln Sie die Nullstelle, die Art und Koordinaten der lokalen Extrempunkte sowie die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen der Funktion f.

b) ⑤ Zeichnen Sie den Graphen von f im Bereich $-2 < x < 8$. Verwenden Sie die bisherigen Ergebnisse und zeichnen Sie diese ein!

c) ⑧ Weisen Sie **mit Hilfe der partiellen Integration** nach, dass die Funktion F mit $F(x) = -e^{-\frac{1}{2}x}(x^2 + 4x + 8) + c$ (x) eine Stammfunktion der Funktion f ist. Ermitteln Sie eine Gleichung derjenigen Stammfunktion von f, deren Graph durch den Punkt $Q(0 \mid -12)$ geht.

d) ② Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das vom Graphen der Funktion f, der x – Achse und der Gerade $x = 2$ eingeschlossen wird.

Gesamtpunktzahl: 62 Viel Erfolg bei Ihrer letzten Mathe-Schulaufgabe wünscht

LK M11 – 2. Schulaufgabe in 13/1 – 11.1.05 - Musterlösung

1. Analytische Geometrie

a) Die Punkte S_k liegen auf einer Parallele zur x_2-Achse im Abstand 1 von der x_1-Achse und Abstand 3 von der x_3-Achse.

b) $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{S_kB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 3-2k \\ -1 \end{pmatrix} = 9 + 9 - 6k - 3 = 15 - 6k \overset{\text{Vor}}{=} 0 \iff k = 2{,}5$

c) $\cos\varphi = \dfrac{\begin{pmatrix} 6 \\ -15 \\ 12 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}}{3\sqrt{4+25+16}\,3\sqrt{3}} = \dfrac{9(-2-5+4)}{27\sqrt{15}} = -\dfrac{1}{\sqrt{15}} \Rightarrow \varphi = 105°$

d) $P(1-\lambda \,|\, \lambda \,|\, -1+\lambda)$

$\overrightarrow{FC} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-1+\lambda \\ -15-\lambda \\ 11+1-\lambda \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+\lambda \\ -15-\lambda \\ 12-\lambda \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -6-\lambda-15-\lambda+12-\lambda = -9-3\lambda \overset{\text{Vor}}{=} 0 \iff \lambda = -3$

$\Rightarrow F\,(4 \,|\, -3 \,|\, -4)$

e) $F_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \\ 12 \end{pmatrix}\right| = \frac{9}{2}\left|\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \frac{9}{2}\left|\begin{pmatrix} 4+5 \\ 4+2 \\ 5-2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2551{,}5}$

f) $V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AS} \circ (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})\right| = \frac{3}{2}\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = 63$

g) $r = \left|\overrightarrow{AB}\right| = 3\sqrt{3}$

$(\vec{x} - \vec{a})^2 = 27$

h) Der Normalenvektor $\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ bzw $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist bereits aus Teilaufgabe e) bekannt.

$E: 3x_1 + 2x_2 + x_3 + c = 0$

c durch Einsetzen von A: $c = -2$

$\Rightarrow E: 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2 = 0$

$\Rightarrow$ Hesse-Normalenform: $\dfrac{1}{\sqrt{14}}(3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2) = 0$

Der Abstand ergibt sich durch Einsetzen des Ursprungs: $d(E,0) = \dfrac{2}{\sqrt{14}}$

2. Infinitesimalrechnung

a) Nullstelle: $x = 0$

$$f'(x) = \frac{x}{e^{\frac{1}{2}x}} - \frac{\frac{1}{4}x^2}{e^{\frac{1}{2}x}} = \frac{x - \frac{1}{4}x^2}{e^{\frac{1}{2}x}} = \frac{x(1-\frac{1}{4}x)}{e^{\frac{1}{2}x}}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = 4$

Bei 0: Vorzeichenwechsel von f' von – nach +, also lokales Minimum $(0|0)$

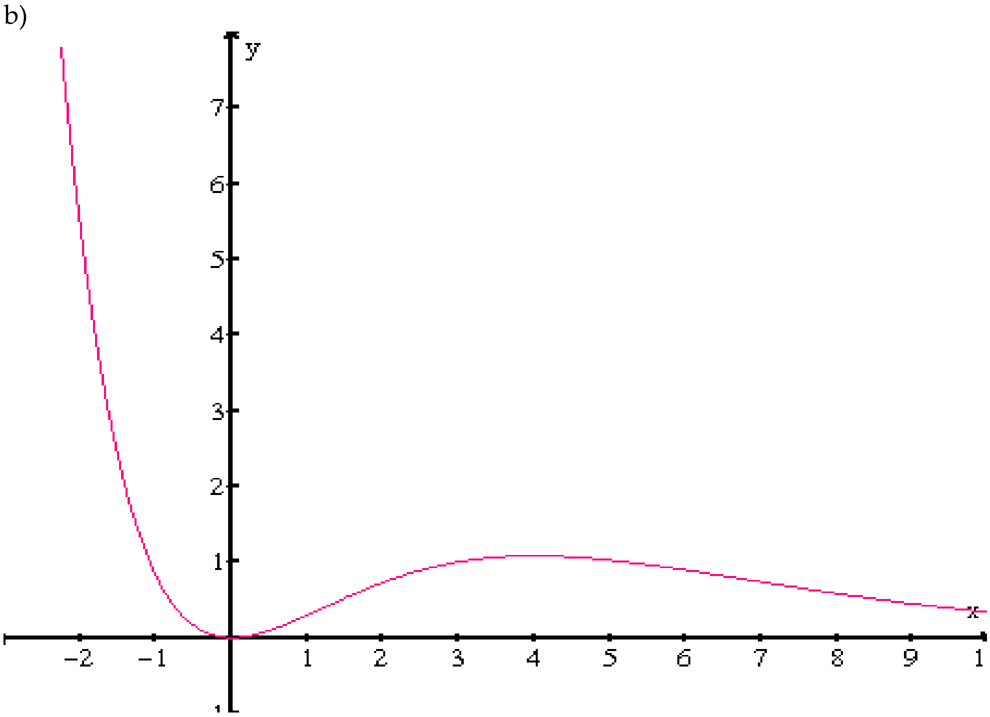
Bei 4: Vorzeichenwechsel von f' von + nach -, also lokales Maximum $(4|8/e^2)$

$$f''(x) = \frac{1-\frac{1}{2}x}{e^{\frac{1}{2}x}} - \frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2}{e^{\frac{1}{2}x}} = \frac{1 - x + \frac{1}{8}x^2}{e^{\frac{1}{2}x}}$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 8 = 0$

$x_{w1/2} = 4 \pm 2\sqrt{2}$ $y_{w1/2} = \dfrac{6 \pm 4\sqrt{2}}{e^{2\pm\sqrt{2}}}$ WePs wg. Vzw. der 2. Ableitung

b)



c)

$$F_c(x) = \int \frac{\frac{1}{2}x^2}{e^{\frac{1}{2}x}}dx = \frac{1}{2}\left[-2x^2e^{-\frac{1}{2}x} + 4\int \frac{x}{e^{\frac{1}{2}x}}dx\right] = -x^2e^{-\frac{1}{2}x} + 2\int \frac{x}{e^{\frac{1}{2}x}}dx$$

$$= -x^2e^{-\frac{1}{2}x} + 2\left[-2xe^{-\frac{1}{2}x} - \int \frac{-2}{e^{\frac{1}{2}x}}dx\right] = -x^2e^{-\frac{1}{2}x} + 2\left[-2xe^{-\frac{1}{2}x} + 2\frac{-2}{e^{\frac{1}{2}x}} + c\right] = -e^{-\frac{1}{2}x}(x^2+4x+8)+c$$

$F_c(0) = -12 \Rightarrow c = -4$

d) $F(2) - F(0) = 8 - 20/e$