II Einführung des Wahrscheinlichkeitsraumes

1 Relative Häufigkeit

1.1 Definitionen

V: 30-maliges Werfen eines Würfels

A := Anzahl der Augenzahl 1 bei 30 Würfen

A_i = A beim i-ten Versuch

B_i := Summe der Anzahlen der Augenzahl 1 vom 1. bis zum i-ten Versuch

1. Versuch (n = 30)	A_i	$h_n(A_i) = A_i/n$	B_i	n_{ges}	$h_n(B_i)$
2.	4	13,3 %	4	30	11,7 %
3.	3	10 %	7	60	14,4 %
4.	6	20 %	13	90	16,6 %
...					
15	7	23,3 %	...	...	

Ergebnis: Empirisches Gesetz der großen Zahlen
Bei einer großen Zahl von Versuchen stabilisiert sich die relative Häufigkeit um einen festen Wert

Definition:
Tritt bei n Versuchen ein bestimmtes Ereignis k-mal auf, so heißt
$h_n(A) = k/n$
die **relative Häufigkeit des Ereignisses A.**
k ist dabei die **absolute Häufigkeit des Ereignisses A.**
Die relative Häufigkeit wird meist in Prozent angegeben.

Weitere Beispiele siehe Buch S. 31-34

1.2 Eigenschaften der relativen Häufigkeit

1. $0 \le h_n(A) \le 1 \quad (n \quad)$
2. $h_n(\quad) = 0$; $h_n(\Omega) = 1$
3. $A \cap B = \quad \overset{2}{\Rightarrow} h_n(A \cap B) = 0$

Versuch:

Geg: Zwei Ereignisse A und B mit
$h_n(A)$ und $h_n(B)$
30-maliges Werfen eines Würfels
A := „Augenzahl gerade"
B := „Augenzahl ist von 1 und 6 verschieden"

Häufigkeiten der Elementarereignisse A_i (Augenzahl i):

Ereignis A_i	{1}	{2}	{3}	{4}	{5}	{6}
$h_n(A_i)$	6/30	6/30	4/30	1/30	8/30	5/30

A B = „nicht 1"

Vermutung: $h_n(A \quad B) \stackrel{?}{=} h_n(A) + h_n(B)$
$h_n(A) = 12/30 = 40$ %
$h_n(B) = 19/30 = 63\ 1/3$ %
➔ $h_n(A) + h_n(B) = 103\ 1/3$ % (Schmarrn!, Wid. zu 1)
Wo liegt der Fehler?

Anderer Ansatz:
$h_n(A \quad B) = h_n(\{2\}) + h_n(\{3\}) + h_n(\{4\}) + h_n(\{5\}) + h_n(\{6\}) = 24/30 = 80$ % (auf jeden Fall richtig!)

Fehler: $h_n(\{2\})$ und $h_n(\{4\})$ werden doppelt addiert.
$A \cap B = \{2, 4\}$

➔ $\boxed{4.\ h_n(A \quad B) = h_n(A) + h_n(B) - h_n(A \cap B)}$

Beweis: Mehrfeldertafel

$A \cup B$	B	$\overline{B}$	
A	$k(A \cap B)$	$k(A \cap \overline{B})$	$k(A)$
$\overline{A}$	$k(\overline{A} \cap B)$	$k(\overline{A} \cap \overline{B})$	
	$k(B)$		

k (...) sind die absoluten Häufigkeiten der in Klammern stehenden Ereignisse bei n Versuchen.

$k(A \cup B) = k(A) + k(B) - k(A \cap B) \quad | : n$

Folgerungen:

5. $\boxed{A \cap B = \{\} \Rightarrow h_n(A \quad B) = h_n(A) + h_n(B)}$
   (da $h_n(A \cap B) = h_n(\varnothing) = 0$)

6. $\boxed{h_n(\overline{A}) = 1 - h_n(A)}$
   Beweis: $\overline{A} \cup A = \Omega$; $\overline{A} \cap A = \varnothing$;
   ➔ $h_n(A \quad \overline{A}) = h_n(A) + h_n(\overline{A})$
   ➔ $1 = h_n(\Omega) = h_n(A) + h_n(\overline{A})$ q. e. d.

7. $\boxed{A = \{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_n\} \Rightarrow h_n(A) = \sum_{\omega \in A} h_n(\omega)}$

Beispiel: Würfelwurf (siehe oben!)
A := „Augenzahl gerade“
$A := \{2; 4; 6\}$
$\omega_1; \omega_2; \omega_3$
$h_n(A) = h_n(\{2\}) + h_n(\{4\}) + h_n(\{6\}) = \ldots = 40\%$

Beispiel (Quelle: Statistisches Bundesamt – Statistisches Jahrbuch)
Am 31.12.2000 hatte Deutschland n = 82 259 500 Einwohner. Davon waren 15 500 100 nicht volljährig, 40 156 500 männlich und davon wieder 32 201 300 volljährig.

♂: „männlich“ v: „volljährig“
$h_n(♂) = 48{,}8$ %
$h_n(♂ \cap v) = 39{,}1$ %
$h_n(v) = 81{,}2$ %

	v	$\overline{v}$	
♂	39,1 %	9,7 %	48,8 %
♂	42,1 %	9,1 %	51,2 %
	81,2 %	18,8 %	

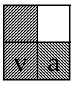
h_n (♂) = h_n (♂ ∩ v) + h_n (♂ ∩ $\overline{v}$),
da (♂ ∩ v) ∩ (♂ ∩ $\overline{v}$) = ∅
und (♂ ∩ v) ∪ (♂ ∩ $\overline{v}$) = ♂

Allgemein:

	A	$\overline{A}$	
B	x	y	$\to x + y$
$\overline{B}$	v	w	$\to v + w$
	↓	↓	↓
	$x+v$	$y+w$	$\to 100$ %

Nach Lösung der Vierfeldertafel lässt sich dort jede passende Fragestellung ablesen.

Im obigen Beispiel:
Wie viele Einwohner sind weiblich oder volljährig?



=:♀∪v
h_n (♀∪v) = 100 % - h_n (♂∩ $\overline{v}$) = 90,3 %

Referate
Experimentelle Bestimmung der Zahl π nach Buffon
Les problème des partis
Laplace-Paradoxa
Das Bernoulli-Eulersche Problem der vertauschten Briefe

2 Der Wahrscheinlichkeitsbegriff

2.1 Definition

Auf der Grundlage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen Wahrscheinlichkeit als Stabilisierungswert der relativen Häufigkeit.
von Mises: Wahrscheinlichkeit = $lim_{n->00}h_n$
Problem: scheitert an der Unmöglichkeit des mathematischen Nachweises des Grenzwerts.
Moderne Mathematik nicht mehr über Begriffe, sondern durch grundlegende Eigenschaften festgelegt.

<u>Axiome von Kolmogorow:</u>

Eine Funktion $P : \wp(\Omega) \rightarrow$, die jedem Ereignis A aus $\wp(\Omega)$ eine reelle Zahl zuordnet, heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß (Wahrscheinlichkeitsfunktion)**, wenn gilt:

I) $P(A) \geq 0$ (Nichtnegativität)
II) $P(\Omega) = 1$ (Normierung)
III) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (Additivität)

Bemerkung:
Funktionen mit I) und III) heißen Maße, z.B. Längen-, Flächen-, Winkelmaß.

Diese Axiome entstammen weitestgehend der Anschauung und erfüllen die Bedingungen:
- Widerspruchsfreiheit
- Minimale Anzahl

Aus den Axiomen und zusätzlichen Definitionen werden weitere Aussagen hergeleitet.

Bemerkenswert: Nach dieser Definition ist nichts über die zahlenmäßige Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses ausgesagt. Dieser wird in der Realität durch seine relative Häufigkeit bestimmt(P(A) := $\lim_{n \to \infty} h_n(A)$*; Mises) oder bei idealisierten Voraussetzungen der Gleichwahrscheinlichkeit von Ereignissen (P(A):=* $\frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$ *; Laplace) durch logische Überlegungen.*

z.B. idealer Würfel:

{ω}	1	2	3	4	5	6
P({ω})	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

z.B. idealer Tetraeder...

1650	1920	1933
Pascal, Fermet	v. Mises	Kolmogorow

2.2 Folgerungen aus den Axiomen von Kolmogorow

Aus den Kolmogorow-Axiomen leiten sich unmittelbar folgende fünf Sätze her, von denen S1 und S5 besonders wichtig sind:

Satz 1: $\boxed{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$

Begr: 1 = (Ax2) P (Ω) = (I.3) P (A $\overline{A}$) = (Ax3) P (A) + P($\overline{A}$) weil A ∩ $\overline{A}$ =

Satz 2: $\boxed{P(\ ) = 0}$

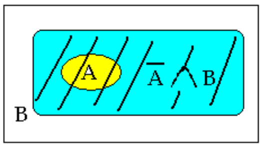
Begr: Wegen $\overline{\Omega}$ = {} gilt nach S1: P (Ω} + P ( ) = 1

Daneben gilt nach Ax2: 1 + P ( ) = 1 => P ( ) = 0

Satz 3: $\boxed{A \quad B \Rightarrow P(A) \quad P(B)}$ (Monotonie des W'Maßes)

Begr: A B => B = A ($\overline{A}$ ∩B) mit A ∩ ($\overline{A}$ ∩B) =

Ax3: P (B) = P (A) + $\underbrace{P(\overline{A} \cap B)}_{\geq 0}$ => P (B) ≥ P (A)



Satz 4: $\boxed{P(A_1 \quad A_2 \quad \ldots \quad A_m) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_m)}$

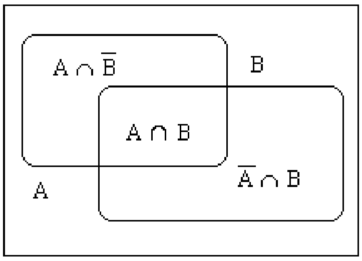
Begr: Erweiterung von Ax3, falls alle A_i, A_j paarweise unvereinbar.

Satz 4: $\boxed{P(A \quad B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$ Satz von **Sylvester**

Begr: $\left.\begin{aligned} A \cup B &= A \cup (\overline{A} \cap B) \\ B &= (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \end{aligned}\right\}$ je unvereinbar

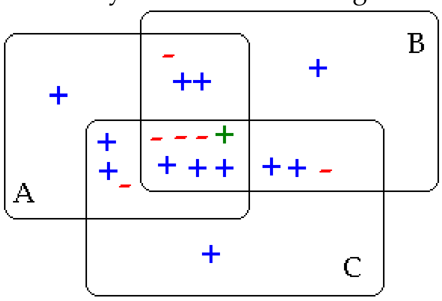
Ax3: $P(A \cup B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B)\ (1)$

$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)\ (2)$



(2) in (1) ... P (A B) = P (A) + P (B)- P (A ∩ B)

Satz von Sylvester für drei Ereignisse

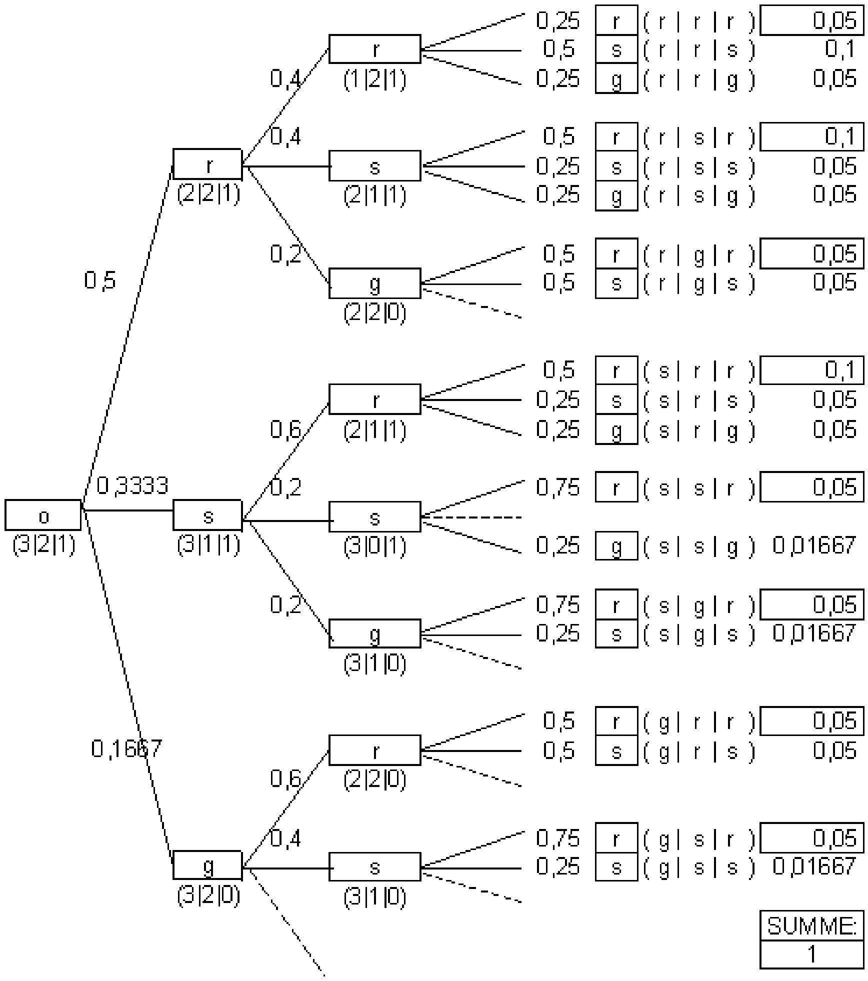


P (A B C) = P (A) + P (B) + P (C) - P (A ∩ B) - P (A ∩ C) - P (B ∩ C) + P (A ∩ B ∩ C)

Ausblick: Wir besitzen eine axiomatische Theorie, die allen Eigenschaften der empirischen, relativen Häufigkeit entspricht (vgl. Gesetze von 1.2). Ungeklärt bleibt, wie man im konkreten Experiment die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen findet.

2.3 W'verteilungen bei mehrstufigen Zufallsexperimenten

Passt zwar thematisch nicht so gut rein vor 2.4, wird aber sonst sehr theorielastig.



Beispiel: Eine Urne enthalte 3 rote, 2 schwarze und 1 grüne Kugel. Man zieht drei Kugeln ohne Zurücklegen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die dritte Kugel rot?

- *Bei oberster Verzweigung zusammen machen, den Rest selbst*
- *An obersten Ast erläutern: In der Hälfte aller Fälle wird im ersten Zug eine rotee Kugel gezogen => und in 1/5 aller Fälle dann noch im zweiten eine grüne => Zahlen multiplizieren*

1. Pfadregel
Die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses erhält man durch Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten auf seinem Pfad.

2. Pfadregel:
Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bei einem mehrstufigen Zufallsexperiments ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller zugehörigen Pfade.

2.4 Einführung der Wahrscheinlichkeitsverteilung

Statt des unhandlichen Wahrscheinlichkeitsmaßes (Definitionsbereich IP (Ω)) streben wir eine einfachere Funktion an und betrachten hierzu die Elementarereignisse.

Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$
Dann: (1) alle $\{\omega_i\}$ für $1 \leq i \leq m$ paarweise unvereinbar
(2) $\{\omega_1\} \quad \{\omega_2\} \quad \ldots \quad \{\omega_m\} = \Omega$
(1) $\wedge$ (2) $P(\{\omega_1\})+P(\{\omega_2\})+\ldots+P(\{\omega_m\}) = 1$

Dabei sind wir in der Wahl der jeweiligen reellen Zahlen $P(\{\omega_i\})$ frei, soweit nur die Axiome aus 2.1 erfüllt sind.

Definition
Die Funktion $P : \{\omega_i\} \to P(\{\omega_i\})$ für 1 i m
nennt man Wahrscheinlichkeitsverteilung, wenn gilt:
(1) $P(\{\omega_i\}) \geq 0$ (2) $\sum_{i=1}^{m} P(\{\omega_i\}) = 1$

Beispiel: Werfen eines Würfels
Zuordnung reeller Zahlen zu den Elementarereignissen

ω	1	2	3	4	5	6	
$P_1(\{\omega\})$	1/4	0	1/4	1/3	0	1/6	Σ = 1
$P_2(\{\omega\})$	1/2	1/4	0	0	1/4	0	Σ = 1
$P_3(\{\omega\})$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	Σ = 1
	1/2	0	-3/4	¼	1/2	½	Σ = 1
	1/3	1/2	0	1/4	1/2	1/3	Σ > 1

Bemerkungen:
1. Die 4. und 5. Zeile sind keine W-Verteilungen!
2. Wahrscheinlichkeit für beliebige Ereignisse als Summe der Elementarereignisse A:= „Gerade Zahl" P_1 ({A})...
3. W-Maß ist an 2^m Stellen, W-Verteilung an m Stellen definiert => Vereinfachung
4. Zu einem Experiment gibt es unendlich viele Verteilungen, über deren Zutreffen empirisch entschieden werden muss. Man spricht daher von Unvollständigkeit des Axiomensystems.

B	$A\cap B\cap\neg C$	$A\cap B\cap C$	$\neg A\cap B\cap C$	$\neg A\cap B\cap\neg C$
Nicht B	$A\cap\neg B\cap\neg C$	$A\cap\neg B\cap C$	$\neg A\cap\neg B\cap C$	$\neg A\cap\neg B\cap\neg C$
	Nicht C	C		Nicht C

2.5 Laplace- Experimente

- *Manchmal sind alle Elementarereignisse gleichwahrscheinlich. Beispiel dazu?*
- *Natürlich hängt dieses von der Wahl des Ergebnisraums und der Wahrscheinlichkeitsverteilung ab: Zweimal Würfeln: Wer sagt einen Ergebnisraum, bei dem alle Elementarereignisse gleiche Wahrscheinlichkeit haben: (1|1);... oder (1|1);(2|2);...aber zum Beispiel Augensumme 2;3,4;...;12*
- *=> Geschickte Wahl*

Bsp: Einmaliger Würfelwurf

ω	1	2	3	4	5	6
$P(\{\omega\})$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Schafkopf (Wahrscheinlichkeit, dass Spieler 1 von 4 Oidn hat, Roulette 1/37)...

Definition

(1) Eine W-Verteilung heißt gleichmäßig, wenn alle Elementarereignisse die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen.

(2) Ein Experiment mit gleichmäßiger Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt **Laplace- Experiment.**

Formeln:

Für ein Elementarereignis gilt: $\boxed{P(\{\omega\}) = 1/|\Omega|}$

Für ein Ereignis A, das aus |A| Elementarereignissen besteht, gilt:

$P(A) = \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\}) = 1/n + ... + 1/n = |A|/|\Omega|$

$\boxed{P(\{\omega\}) = |A|/|\Omega| = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ereignisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ereignisse}}}$ (Formelsammlung!)

Man nennt einen Würfel Laplace-Würfel oder L-Würfel, wenn alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich sind.

Beispiel: Drei-Mindestens-Aufgabe mit einem Laplace-Würfel

Wie oft muss man einen L-Würfel **mindestens** werfen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von **mindestens** 97% **mindestens** einmal die Sechs fällt?

E:= "Bei n Würfen mindestens einmal Sechs"

$P(E) >= 0,97$

- „Mindestens einmal" ist Gegenereignis zu „Keinmal"

$P(E) = 1 - P(\overline{E}) >= 0,97$

$1- \quad (5/6)^n >= 0,97$

$(5/6)^n >= 0,03$

$\ln((5/6)^n) = \ln(0,03)$

n >=

Lösungsweg für ein Laplace-Experiment im Beispiel „gleichzeitiges Werfen zweier Würfel":

Gesucht wird die Wahrscheinlichkeit für die Ereignis A: „Augensumme 4", B: „Augensumme mind. 10" C: „Augensumme nicht 3" und die wahrscheinlichste Augensumme.

1. Konstruktion eines geeigneten Ergebnisraums Ω, dessen Elemente gleichwahrscheinlich sind.
2. Bestimmung der Mächtigkeiten der betrachteten Ereignisse

zu 1: Man muss künstlich eine Würfelreihenfolge einführen, sonst wäre P (11) ≠ P (12)

Zur einfachen Berechnung der Mächtigkeiten gliedern wir das Ergebnis schematisch nach Augensummen:

A_Summe	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Erg-Raum	11	12	13	14	15	16	26	36	46	56	66
		21	22	23	24	25	35	45	55	65	
			31	32	33	34	44	54	64		
				41	42	43	53	63			
					51	52	62				
						61					

Also: $|\Omega|$ = 36 und p = 1/36

zu 2. Die Mächtigkeiten ergeben sich durch Auszählen der Elemente in einem Ereignis oder seinem Gegenereignis.
P(A) = 3/36 = 1/12; P (B) = 6/36 =1/6; P (C) = 1 – 2/36 = 34/36 = 17/18; 7 ist die wahrscheinlichste Augensumme.

S42/11-15

2.6 Kombinatorik

a Allgemeines Zählprinzip

Beispiel:

Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine willkürlich aus dem Intervall [100, 999] herausgegriffene natürliche Zahl aus lauter verschiedenen Ziffern besteht.

$\Omega = \{100, 101, 102, ..., 999\}$

$|\Omega| = 999-100+1 = 900$

A: „Zahl besteht aus lauter verschiedenen Ziffern“

$A = \{102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 120, ..., 987\}$

$|A| = ?$

$A = \{(a_1 | a_2 | a_3) | a_1 \quad \{1,2,...,9\}, a_{2,3} \quad \{0,1,2,...,9\}, a_1, a_2, a_3$ paarweise verschieden$\}$

9 9 8 Mgk.

$A = 9 \cdot 9 \cdot 8$

$P(A) = 9 \cdot 9 \cdot 8/100 = 72\ \%$

Satz 1: Zählprinzip zum Abzählen von Tupeln

Gibt es bei einem n-Tupel $(a_1|a_2|..|a_n)$ für die Besetzung der...

... 1. Stelle k_1 Möglichkeiten.

... 2. Stelle k_2 Möglichkeiten.

...

... n-ten Stelle k_n Möglichkeiten,

so gibt es insgesamt $k_1 \cdot k_2 \cdot ... \cdot k_n$ mögliche Tupel.

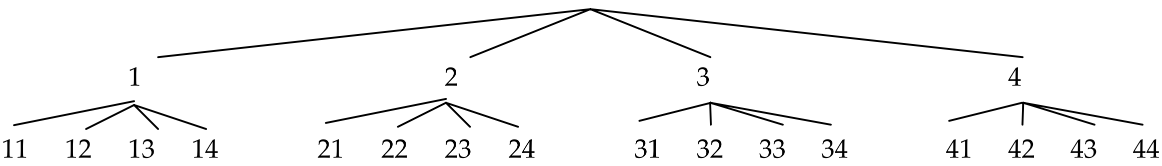
Weitere Beispiele:

1. 11er-Wette beim Fußballtoto:
   $\Omega = \{(a_1|a_2|...|a_{11}) | a_1|a_2,...,a_{11} \quad \{0,1,2\}\}$
   $|\Omega| = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot ... \cdot 3 = 3^{11}$
2. An einem Pferderennen nehmen 20 Pferde teil. Beim Wettabschluss sollen die ersten drei Plätze richtig getippt werden. Wie viele Möglichkeiten?
   $\Omega = \{(a_1|a_2|a_3) | a_1, a_2, a_3 \quad \{1,2,...20\}, a_1, a_2, a_3$ paarweise verschieden $\}$
   $|\Omega| = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$

b Die geordnete Stichprobe mit Zurücklegen

Beispiele:

1. Aus einer Urne mit n = 15 (Billard!) durchnummerierten Kugeln wird viermal (allgemein: k-mal) eine Kugel gezogen und zurückgelegt.
   viermal: $|\Omega| = |\Omega_1| \cdot |\Omega_2| \cdot |\Omega_3| \cdot |\Omega_4| = 15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15$ $\mathbf{= 15^4}$ (nach Satz 1))
   k-mal: $|\Omega| = \mathbf{15^k}$
2. Möglichkeiten beim Spiel „Stein, Schere, Papier“ (Analog: Aus einer Urne mit drei unterscheidbaren Kugeln wird zweimal mit zurücklegen gezogen.)
   Spieler 1: 3 Möglichkeiten, Spieler 2: 3 Möglichkeiten
   $|\Omega| = |\Omega_1| \cdot |\Omega_2| = 3^2$
3. Wie viele zweistellige Zahlen lassen sich aus {1; 2; 3; 4} bilden, wenn Wiederholung erlaubt ist?



Nach a) ergeben sich $|\Omega| = |\Omega_1| \cdot |\Omega_2| = 4^2$ Möglichkeiten.

Satz 2:
„Aus n unterscheidbaren Objekten in einer Urne werden nacheinander und mit zurücklegen k Objekte entnommen.“ ⇔ „Anzahl der Tupel der Länge k (**k-Tupel**) aus einer Menge mit n Elementen.“ Mächtigkeit des Ergebnisraumes: $\boxed{|\Omega| = n^k}$

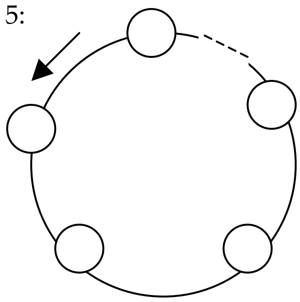
c Geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen – Permutationen

Beispiele:

1. A, B, C sollen an die Tafel kommen und sich auf einen Stuhl setzen. Wie wahrscheinlich war es (Sympathie außer Acht gelassen), dass der Junge zwischen den Mädchen sitzt?
   Ausprobieren, dann: wie viele Möglichkeiten hat der erste, wie viele der zweite...:
   $|\Omega| = 3 \cdot 2 \cdot 1$
   $|E| = 2$
   $P(E) = 1/3$

Definition
Das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen nennt man **Fakultät:**
$n! = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$ mit $1! = 1$ und $0! = 1$

2. Eine n-köpfige Familie setzt sich auf die n Plätze eines runden Tisches. Wie viele Möglichkeiten? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie in der Reihenfolge ihres Alters sitzen (unter Beachtung des Drehsinns)? Betrachte zunächst den Fall n = 5:
   Gesamtanzahl der Möglichkeiten: n!
   Im Fall n = 5: n! = 120
   E: „Zyklus“, d.h. z.B: (12345) (34512)...
   $|E| = 5$ (ohne Beachtung des Drehsinns: 10)
   allgemein: $|E| = n$ (o. B. d. D: 2n)
   $P(E) = 5/120 = 1/24$
   allgemein: $P(E) = n/n! = 1/(n-1)!$



3. Wie viele zweistellige Zahlen lassen sich aus {1,2,3,4} ohne Wiederholung bilden?

4 1 2 3 4
·
3 12 13 14 21 23 24 31 32 34 41 42 43

nach Satz 1: $|\Omega| = 4 \cdot 3 = \frac{4!}{2!} = 12$

Satz 3:
„Aus n unterscheidbaren Objekten werden nacheinander ohne Zurücklegen k Objekte entnommen.“
“k – Permutationen einer n-Menge“
lat. permutare, verändern, wechseln, vertauschen

Mächtigkeit des Ergebnisraumes: $\boxed{|\Omega| = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}}$

Hinweis auf Taschenrechner, nPr

4. 3 Schüler aus dem Kurs auf Plätze bei Wettrennen: $18 \cdot 17 \cdot 16$
5. Beispiel: Eine Urne enthält 26 Kugeln für die Buchstaben des Alphabets. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man bei zehnmal ziehen ohne/mit Zurücklegen das Wort „STICHPROBE“?
   $|\Omega_{ohne}| = \frac{26!}{(26-10)!}$ => p 1 $0,5 \cdot 10^{-13}$
   $|\Omega_{mit}| = 26^{10}$=> p 1 $0,7 \cdot 10^{-14}$

d Geordnete Stichprobe o. Z. mit mehrfach gleichen Elementen

Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die Buchstaben in LILLI zu unterscheidbaren Zeichenfolgen zu arrangieren?

Bemerkung:
Zieht man aus einer n-Urne n-mal, so spricht man von einer Vollerhebung. Nach c gibt es dabei unter Beachtung der Reihenfolge n! Varianten für die Anordnung, falls alle Elemente unterscheidbar sind.

Beispiele
1. Gesucht ist die Anzahl der 10-stelligen Zahlen mit genau
   - 2-mal Ziffer 7
   - 3-mal Ziffer 1
   - 5-mal Ziffer 9

also z. B. 7991979191.
Dies entspricht einem Urnenexperiment mit 10-maligem Ziehen aus einer 10-Urne.

Falls alle Ziffern unterscheidbar wären, gäbe es 10! Möglichkeiten. Da die 7er nicht unterscheidbar sind, gibt es nur halb so viele Möglichkeiten, wegen der 6er verschmelzen jeweils 3! dieser Möglichkeiten...

Insgesamt also $\frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 5!} = 2520$ Möglichkeiten.

Satz 4
„Aus n Objekten einer Urne, von denen nur p verschieden sind und das erste n_1 mal, das zweite n_2 mal u. s. w. vorkommt, werden nacheinander ohne Zurücklegen alle gezogen.“ ⇔ Permutationen einer n-Menge mit p verschiedenen Elementen.

Mächtigkeit des Ergebnisraumes: $\boxed{|\Omega| = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdot\ldots\cdot n_p!}}$

Dabei gilt: $p \leq n$ und $\sum_{i=1}^{p} n_i = n$

2. Auf wie viele verschiedene Arten lassen sich die Buchstaben im Wort MISSISSIPPI anordnen?
$|\Omega| = \frac{11!}{1!4!\cdot 4!2!} = 34650$

3. Alle Permutationen von AAS, OTTO, LILLI
$|\Omega_1| = \frac{3!}{2!} = 3$ AAS, ASA, SAA

$|\Omega_2| = \frac{4!}{2!2!} = 6$ OOTT, OTOT, OTTO, TOOT, TOTO, TTOO

$|\Omega_3| = \frac{5!}{3!2!} = 10$ IILLL, ILILL, ILLIL, ILLLI, LIILL, LILIL, LILLI, LLIIL, LLILI, LLLII

4. Wie viele Permutationen von HALLELUJA gibt es? Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man bei viermaligem Ziehen mit/ohne Zurücklegen aus der Urne das Wort ULLA?

a) $|\Omega| = \frac{9!}{2!3!} = 30240$

b) P_m (ULLA) = $\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{9} = \frac{18}{9^4} \approx 0{,}0027$

c) P_o (ULLA) = $\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{6} = \frac{12}{3024} \approx 0{,}0040$

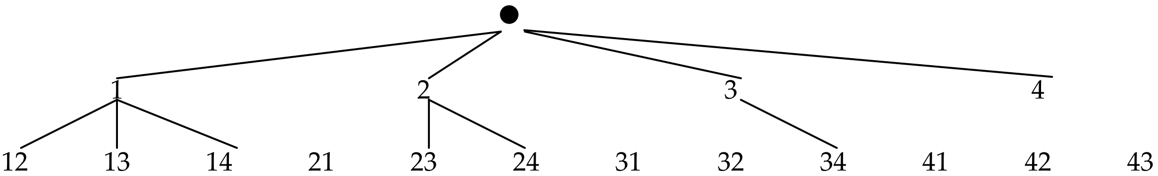
e Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen

*100 €, 100 € und 100 € sollen an Schüler der Klasse verschenkt werden. Wie viele mögliche Verlosungsausgänge gibt es dabei: 27*26*25, aber Reihenfolge unter den 3 gezogenen interessiert mich nicht, deshalb sind immer 3! = 6 Fälle gleich. Daher Anzahl 27! /(24!·3!)*

Für eine Stichprobe ohne Beachtung der Reihenfolge (ungeordnete Stichprobe) entnimmt man k Objekte nacheinander und betrachtet sie als Menge (wie beim Lotto) oder zieht sie mit einem Griff, d.h. (1,2,3) = (3,2,1).

Beispiele:

1. Wie viele verschiedenziffrige Teilmengen zweier Elemente lassen sich aus {1,2,3,4} entnehmen?



geordnet: $|\Omega_g| = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$ nach c)

ungeordnet: $|\Omega_u| = |\Omega_g|\ /2 = 6$

2. Dasselbe mit k = 3 Teilmengen der n = 4 – Menge {1,2,3,4}:

Geordnet: Ω_g = { **123**; 132; 213; 231; 312; 321; <- k! = 6 Permutationen von **123**
124; 142; 214; 241; 412; 421; <- k! = 6 Permutationen von **124**
134; 143; 314; 341; 413; 431; <- k! = 6 Permutationen von **134**
234; 243; 324; 342; 423; 432} <- k! = 6 Permutationen von **234**

Ungeordnet: Ω_u = { **123**; **124**; **134**; **234** }

Jedes Element in Ω hat mit Reihenfolge genau k! Permutationen.

Also $|\Omega| = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$

Satz 5:

„Aus n unterscheidbaren Objekten einer Urne werden k auf einmal herausgegriffen.“ „k- Teilmengen einer n-Menge“ „k-Kombinationen einer n-Menge“.

Mächtigkeit des Ergebnisraumes: $\binom{n}{k} := \begin{cases} 0, \text{ falls } k > n \\ \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \text{ falls } 0 \le k \le n \end{cases}$

$\binom{n}{k}$ heißt **Binomialkoeffizient**. Lies: „k aus n“ oder „n über k“. Taschenrechner: nCr

Beispiel:

Unter 30 Glühbirnen sind 2 defekt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind von

a) 2 gezogenen Birnen beide,
b) 3 gezogenen Birnen eine defekt?

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{30}{2}} \approx 0{,}00023$ $\qquad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{\binom{2}{1}\binom{30-2}{2}}{\binom{30}{3}} \approx 0{,}1862$

f Ungeordnete Stichprobe mit Zurücklegen

Satz 6 (Beweis mündlich):

„Aus n unterscheidbaren Objekten einer Urne werden k mit Zurücklegen gezogen und die Reihenfolge nicht beachtet.“

Mächtigkeit des Ergebnisraums: $|\Omega| = \binom{n+k-1}{k}$

Beweisidee siehe Folie

Beispiel

Aus einer Urne mit 15 (Billard!) durchnummerierten Kugeln wird viermal eine Kugel gezogen und zurückgelegt, ohne auf die Reihenfolge zu achten.

$$|\Omega| = \binom{15+4-1}{4} = \binom{18}{4} = 3060$$

g Zusammenfassung

Anzahl beim Ziehen von k Elementen aus n	Mit Beachtung der Reihenfolge	Ohne Beachtung der Reihenfolge
Mit Wiederholung	n^k (k-Tupel)	$\binom{n+k-1}{k}$ (k-Kombinationen)
Ohne Wiederholung	$\frac{n!}{(n-k)!}$ (k-Permutationen)	$\binom{n}{k}$ (k-Mengen)

h Eigenschaften der Binomialkoeffizienten

Eigenschaften:

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ und $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ daraus: $0! = 1$ und $1! = 1$

2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

3. $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n+1-k)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}$

4. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

5. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

i Typische Anwendungen

1. Wahrscheinlichkeit, dass beim Ziehen von n Kugeln aus einer Urne mit N Kugeln genau s schwarz sind, wenn die Urne S schwarze Kugeln beinhaltet:
   Z: „Anzahl schwarzer Kugeln“
   1) Ziehen ohne Zurücklegen:
   $$P(Z = s) = \frac{\binom{S}{s}\binom{N-S}{n-s}}{\binom{N}{n}}$$
   Auch Hernehmen bei gleichzeitigem Ziehen der Kugeln!
   2) Ziehen mit Zurücklegen
   $$P(Z = s) = \binom{n}{s}\left(\frac{S}{N}\right)^s\left(\frac{N-S}{N}\right)^{n-s}$$ oder kürzer mit $p = \frac{S}{N}$ und $q = \frac{N-S}{N} = 1-p$
   $$P(Z = s) = \binom{n}{s}p^s q^{n-s}$$
2. In einer Schachtel mit 12 Tischtennisbällen sind 3 unbrauchbar. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Ziehen von 4 Bällen höchstens einen unbrauchbaren zu entnehmen?
   X: „Anzahl unbrauchbarer Bälle“
   $$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{\binom{3}{0}\binom{9}{4}+\binom{3}{1}\binom{9}{3}}{\binom{12}{4}} = \frac{1\cdot 126 + 3\cdot 84}{495} = 0{,}7636$$
3. **Geburtstagsprobleme**
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei (zufällig ausgewählte) Personen an verschiedenen Tagen Geburtstag haben (ohne Schaltjahr)?
   $|\Omega| = 365^2$; $|A| = 365 \cdot 364 \Rightarrow P = 364/365 = 0{,}99726$
   Bei drei Personen:
   $|\Omega| = 365^3$; $|A| = 365 \cdot 364 \cdot 363 \Rightarrow P = 364 \cdot 363/365^2 = 0{,}99180$
   Bei k Personen:
   $|\Omega| = 365^k$; $|A| = 365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - k + 1) \Rightarrow P = \frac{1}{365^k}\cdot\frac{365!}{(365-k)!}$
   (Hinweis auf 365 nPr k)
   Speziell: k = 19: P = 62,1 % (W' keit bei 1 – 62% = 38%, dass 2 am gleichen Tag haben!)
   k > 365: P = 0%
4. In einer Schublade befinden sich 4 rote, 2 gelbe und 6 blaue Socken. Im Dunkeln werden zwei Socken entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind diese gleichfarbig?
   $$P = \frac{\binom{4}{2}+\binom{2}{2}+\binom{6}{2}}{\binom{12}{2}}$$
5. In einer Urne befinden sich 12 gelbe und 14 blaue Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 8 gleichzeitig gezogenen Kugeln genau 4 gelbe befinden?
   $$P = \frac{\binom{12}{4}\cdot\binom{14}{4}}{\binom{26}{8}} = 31{,}7\%$$

3 Bedingte Wahrscheinlichkeit

3.1 Einführung

Beispiel

	$J=\overline{M}$	M	
A: „5a“	14	11	25
$\overline{A}$: „5b“	13	17	30
	27	28	

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind aus der Klasse 5a ist, unter der Bedingung, dass es ein Mädchen ist?

Schreibweise: $P_M(A)$

Aus der Tabelle: $P_M(A) = \frac{|A \cap M|}{|M|} = \frac{11}{28}$

im Unterschied zu $P(A \cap M) = \frac{|A \cap M|}{|\Omega|}$

Doch: was tun, wenn die obige Tabelle nur aus Prozentangaben besteht?

	$J=\overline{M}$	*M*	
A: „5a“	*25,45%*	*20,00%*	*45,45%*
$\overline{A}$: „5b“	*23,64%*	*30,91%*	*54,55%*
	49,09%	*50,91%*	

Kann man $P_M(A)$ auch nur mit Hilfe von Wahrscheinlichkeiten berechnen?

$P(M) = \frac{|M|}{|\Omega|}$ und $P(A \cap M) = \frac{|A \cap M|}{|\Omega|}$

$$\Rightarrow P_M(A) = \frac{\frac{|A \cap M|}{|\Omega|}}{\frac{|M|}{|\Omega|}} = \frac{P(A \cap M)}{P(M)}$$

Definition

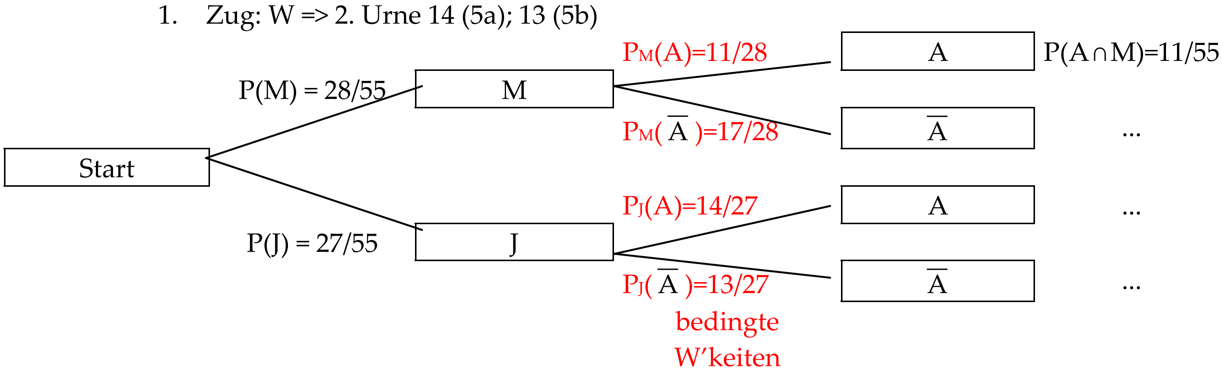
(Ω, P) *(Ergebnisraum; W'verteilung)* sei ein **Wahrscheinlichkeitsraum.** Ist B ein Ereignis mit $P(B) > 0$ und A ein beliebiges Ereignis, so heißt

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ die **bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B.**

3.2 Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Baumdiagramm

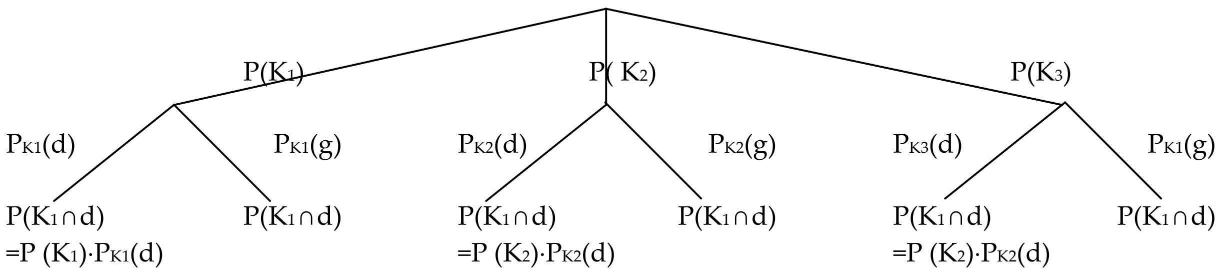
Beispiel aus 3.1:
1. Urne: 28 M, 27 J

1. Zug: M => 2. Urne 11 (5a), 17 (5b)
1. Zug: W => 2. Urne 14 (5a); 13 (5b)



Beachte:
An den Ästen stehen bedingte Wahrscheinlichkeiten, die häufig von der „Vorgeschichte" abhängen.

Beispiel:
Aus 3 Kartons mit Glühbirnen wird einer ausgewählt und daraus eine Birne geprüft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie defekt, wenn sich im ...
... ersten Karton 200 Birnen befinden, wovon 2% defekt sind.
... zweiten Karton 100 Birnen befinden, wovon 1% defekt sind.
... dritten Karton 150 Birnen befinden, wovon 12% defekt sind.
K_i: „Karton i wird untersucht"
d bzw. g: „getestete Birne kaputt/ganz"



$$P\,(\text{defekt}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{100}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{100}+\frac{1}{3}\cdot\frac{12}{100}=\frac{15}{300}=5\%$$

3.3 Eigenschaften der bedingten Wahrscheinlichkeit

Beachte:

1. $P_A(B)$ kann sowohl >, = als auch < $P(B)$ sein
2. $P_A(A) = 1$
3. $P_A(B) = \begin{cases} 0, \text{falls } A \cap B = \{\} \\ 1, \text{falls } A \cap B = A \end{cases}$
4. $P\ (B) = P(B)$, da im Nenner 1 steht.
5. Gleiche Eigenschaften wie für gewöhnliche Wahrscheinlichkeiten
   $P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$
   $P_A(B \quad C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C)$
6. **Neu: Produktregel**
   $\boxed{P(A \cap C) = P(A) \cdot P_A(C)}$ aus Definition
   $P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) \cdot P_{A \cap B}(C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A \cap B}(C)$

Beispiel:
Die Produktregel kann oft alternativ zur Kombinatorik genutzt werden.
Aus einer Urne mit Kugeln 1-5 wird zweimal mit Beachtung der Reihenfolge und ohne Zurücklegen gezogen. Wie wahrscheinlich ist das Ereignis (23)
Kombinatorik $P(23) = 3!/5! = 1/20$
E_1: Die erste Kugel ist eine 2
E_2: Die zweite Kugel ist eine 3....

$P(E_1) = 1/5$
$P_{E_1}(E_2) = 1/4$
$P(E_1 \cap E_2) = P_{E_1}(E_2) \cdot P(E_1) = 1/4 \cdot 1/5 = 1/20$

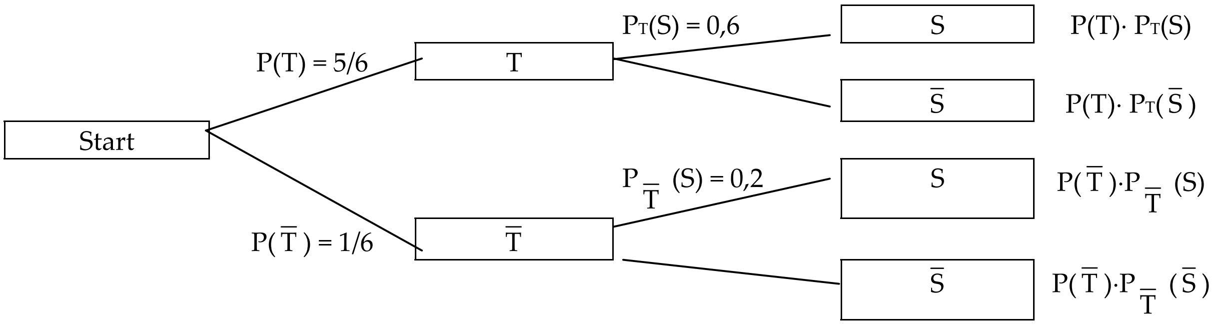
3.4 Die Formel von Bayes

Beispiel
60% der Touristen auf dem Oktoberfest tragen einen Sepplhut. Es gibt dort 5 mal mehr Touristen als Bayern. Nur jeder fünfte Bayer trägt einen Sepplhut.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist jemand mit einem Sepplhut ein Bayer?

Geg.: $P_T(S) = 0{,}6$; $P(T) = 5/6$; $P_{\overline{T}}(S) = 0{,}2$

Ges.: $P_S(\overline{T})$

Baumdiagramm



Lösung: ... 1/16

<u>Oder mit Rechnung:</u>

$$P_S(\overline{T}) = \frac{P(S \cap \overline{T})}{P(S)} = \frac{P_{\overline{T}}(S) \cdot P(T)}{P(T) \cdot P_T(S) + P(\overline{T}) \cdot P_{\overline{T}}(S)}$$

Formel von Bayes

Ist A, $\overline{A}$ eine zweielementige Zerlegung von Ω, und C ein Ereignis mit P(C) > 0, so gilt:

$$P_C(A) == \frac{P_A(C) \cdot P(A)}{P(A) \cdot P_A(C) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(C)}$$

Für eine n-elementige Zerlegung von Ω gilt die Formel auf S. 107 der Formelsammlung (nicht im Lehrplan)!

S. 74/16, 17 (eine davon als HA!)
Als HA noch 72/8

4 Unabhängigkeit

4.1 Unabhängigkeit zweier Ereignisse

- *Einführung (Folie: Lotto-Ziehungshäufigkeiten)*

- *Sind blonde Menschen wirklich doofer als andere Menschen?*

Sind die Merkmale B und D stochastisch unabhängig?

Es gilt: P(B) = 12%; P(D) = 30 %

- *Kann man hier schon deutlich erkennen, ob blonde Menschen doof sind?*
- *Wir brauchen noch den Anteil der Doofen an den Blonden.*

$P(B \cap D) = 3{,}6\%$. Sei A die Anzahl der getesteten Menschen.

Frage: Sind die Blonden genauso doof wie alle?
Anteil der Doofen unter allen = Anteil der blonden Doofen an den Blonden

$$\frac{P(D)\cdot A}{A} = \frac{P(D\cap B)\cdot A}{P(B)\cdot A}$$

$P(D) = \dfrac{P(D\cap B)}{P(B)}$; $30\ \% = \dfrac{3{,}6\%}{12\%}$ (wahr!) => B,D sind unabhängig.

Produktformel
Zwei Ereignisse A und B heißen stochastisch unabhängig, wenn gilt: $P(A)\,P(B) = P(A\cap B)$.

Merke: Nicht verwechseln: Wenn A und B unvereinbar sind, gilt: $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$ (Summenformel)

Beispiele

1. 18 Schüler (10 w, 8 m) fahren auf Kursfahrt. 6 Frauen und 3 Männer wollen abends in die Disko. Sind die Ereignisse W: „Eine zufällig gewählte Person ist weiblich" und D: „Eine zufällig gewählte Person will in die Disko." unabhängig?
   $P(W) = 5/9$ $P(D) = ½$ $P(W \cap D) = 1/3$ => abhängig
   (Die Frauen wollen überproportional häufig in die Disko)
2. Für welche Ereignisse gilt, dass E und E unabhängig sind?
   $P(E) = P(E) \cdot P(E)$ => $P(E) = 0$ oder $P(E) = 1$
3. Beweise unter Angabe des Geltungsbereichs des Satzes: Zwei unvereinbare Ereignisse sind abhängig!
   unvereinbar: $A \cap B =$ => $P(A \cap B) = 0$
   unabhängig: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
   Der Satz gilt, wenn $P(A) \neq 0$ und $P(B) \neq 0$

Es gilt:
A, B unabhängig $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$,B unabhängig $\Leftrightarrow$ $\overline{A},\overline{B}$ unabhängig
(Machen Sie sich das am Blond-doof-Beispiel klar!)

Zum Beweis:
$P(\overline{A} \cap B) = P((\Omega\setminus A)\cap B) = P(B\setminus(A\cap B)) = P(B)-P(A\cap B) =$ (Unabh. von A, B) $P(B) - P(A)P(B) = (1-P(A))\, P(B) = P(\overline{A})\cdot P(B)$

4.2 Unabhängigkeit von drei und mehr Ereignissen

Beispiel

Fritz hat am die Fächer Mathe, Deutsch und Chemie von Dienstag bis Freitag.
Sei $\Omega = \{Di, Mi, Do, Fr\}$ (Laplace-verteilt) mit $M = \{Di, Fr\}$, $D = \{Do, Fr\}$, $C = \{Mi, Fr\}$
M, D, C sind offensichtlich paarweise unabhängig, da z. B:
$P(M \cap D) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(M) \cdot P(D)$ u. s. w.

Dagegen sind C und $M \cap D$ abhängig, denn
$P(C \cap (M \cap D)) = P(C \cap M \cap D) = \frac{1}{4} \neq 1/8 = P(C) \cdot P(M \cap D)$ *(Wenn man „gleichzeitig"(an einem Tag) Mathe und Deutsch hat, hat man sicher auch Chemie)*

Vollständig unabhängig sind drei Ereignisse A, B, C aber erst dann, wenn sie neben der paarweisen Unabhängigkeit auch die Unabhängigkeit jedes Ereignisses vom gleichzeitigen Eintreten der beiden anderen erfüllen, also:

$P(A \cap (B \cap C)) = P(A) \cdot P(B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$
$P(B \cap (A \cap C)) = P(B) \cdot P(A \cap C) = P(B) \cdot P(A) \cdot P(C)$
$P(C \cap (A \cap B)) = P(C) \cdot P(A \cap B) = P(C) \cdot P(A) \cdot P(B)$

Diese drei Gleichungen lassen sich zusammenfassen in
$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

Definition

1. Drei Ereignisse A, B, C heißen stochastisch unabhängig, wenn gilt:
   a. Je zwei der Ereignisse sind paarweise unabhängig (wie in 4.1 definiert)
   b. Es gilt die Produktregel für drei Ereignisse: $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$
2. n Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ heißen stochastisch unabhängig, wenn für jede Kombination von zwei oder mehr voneinander verschiedenen Ereignissen die Produktregel gilt.