III Zufallsgrößen

1 Beispiel und Definition

Beispiel: Dreimal Münzwurf
Spiel: 1€ Einsatz, wenn nicht zwei gleiche hintereinander 3 € Auszahlung.
$\Omega = \{(x_1 | x_2 | x_3) |\ x_1, x_2, x_3 \quad \{Z,K\}\}$
Rentiert sich dieses Spiel? Dabei geht es nur um den Gewinn! Also: Definition Gewinn:
Wir betrachten den Gewinn: Gewinn X = Auszahlung – Einsatz.
-> Die Spielregel ordnet jedem Tripel ω aus Ω eine Zahl „Gewinn" X (ω) zu
-> Funktion X auf Ω: X: ω -> X (ω)

Wertetabelle von X:

ω	KKK	KKZ	KZK	ZKK	KZZ	ZKZ	ZZK	ZZZ
X (ω)	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1

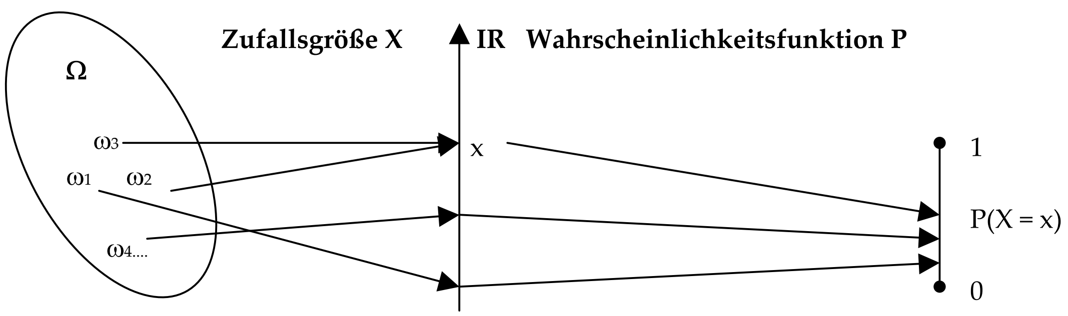
P („Gewinn") = P (X (ω) = 2) = 2/8
P („Verlust") = P (X (ω) = -1) 6/8
Zur Frage der Rentabilität werden wir in Kürze den Erwartungswert einer Zufallsgröße einführen.

Definition
1. Eine Funktion X, die jedem Elementarereignis {ω} eines Ereignisraumes P(Ω) eine reelle Zahl zuordnet, heißt **Zufallsgröße X.**
2. Die Funktion P: IR -> [0,1] mit x -> P(X=x) heißt **Wahrscheinlichkeitsfunktion** oder **Wahrscheinlichkeitsverteilung** der Zufallsgröße X. Man sagt auch X ist nach P verteilt.

Einen Spieler interessiert nicht, wie er gewinnt, sondern ob und wie viel er gewinnt.

Bemerkung:
1. Jede Zufallsgröße X erzeugt auf natürliche Weise eine Zerlegung von Ω in disjunkte Teilmengen, indem man jeweils die Ereignisse zusammenfasst, die den gleichen Wert ergeben, also $\{\omega | X(\omega) = x\}$.
Es gilt: $\Omega = \bigcup_{x \in W_X} \{\omega | X(\omega) = x\}$
2. Die Wertemenge $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ ist selbst ein möglicher Ergebnisraum des Experiments und stellt eine Vergröberung des ursprünglichen Ω dar.

Im Beispiel:
Vergröberung: Ω = {KKK,...,ZZZ} -> Ω' = {-1,2}



Ein weiteres Beispiel: Chuck-a-luck
Ein Spieler darf eine der Zahlen k = 1… 6 nennen und dann 3 Würfel werfen. Für jeden Würfel, der seine Zahl zeigt, erhält er 1 € vom Spielführer, erscheint seine Zahl nicht, muss er 1 € zahlen.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$, $|\Omega| = 6^3$
Der Spieler hat die Zahl 6 genannt.

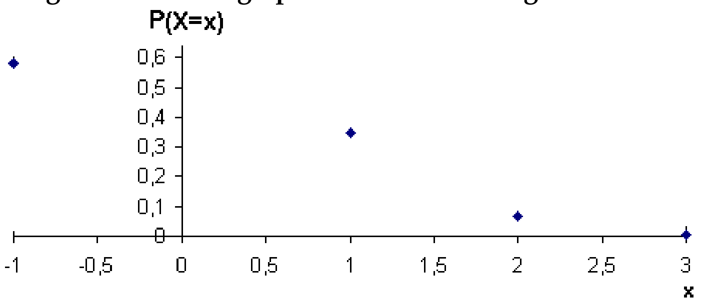
Zufallsgröße: „Gewinnfunktion“

ω	666	665…166	655-116	555-111
X(ω)	3	2	1	-1

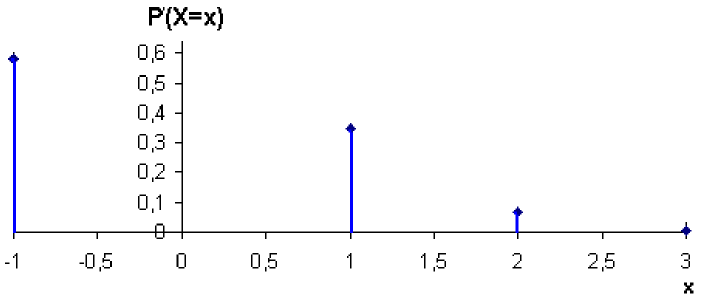
Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsgröße

	X(ω) = 3	X(ω) = 2	X(ω) = 1	X(ω) = -1
P (X(ω) = x)	1/216	$5 \cdot 3 / 216 = 15/216$	$5 \cdot 5 \cdot 3/216 = 75/216$	$5^3/6^3 = 125/216$

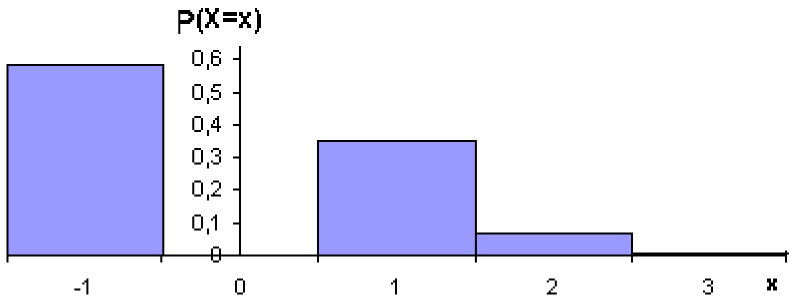
Möglichkeiten der graphischen Darstellung



Stabdiagramm



Histogramm: Wahrscheinlichkeit = Inhalt der Rechtecksfläche
$\Delta x = 1 \Rightarrow$ Ordinate W (x); $\Delta x = 1 \Rightarrow$ Ordinate $2 \cdot W(x)$;



2 *Die kumulative Verteilungsfunktion*

Interessiert man sich für die Wahrscheinlichkeit, dass der Gewinn beim Chuck-a-luck höchstens x € beträgt, d.h. Werte aus dem Bereich]-∞; x] annimmt, so ist eine weitere Funktion definiert:

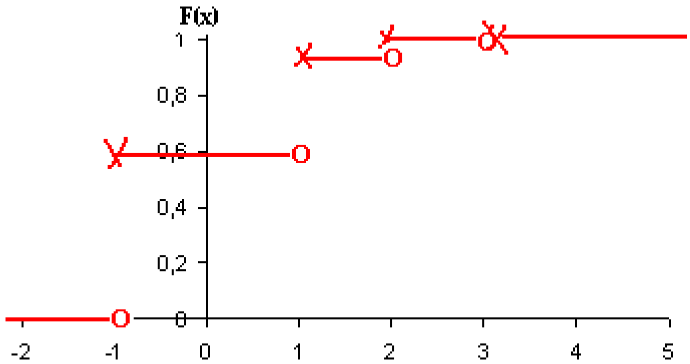
(Kumulative) Verteilungsfunktion der Zufallsgröße X

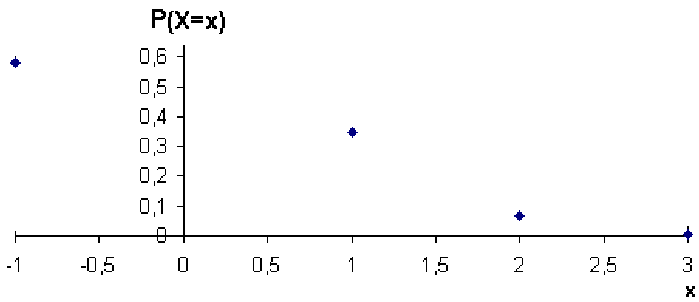
F: IR -> [0;1]

$x \to F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i)$

	X(ω) = -1	X(ω) = 1	X(ω) = 2	X(ω) = 3
P (X(ω) = x)	$5^3/6^3 = 125/216$	5 ·5· 3/216 = 75/216	5 · 3 / 216 = 15/216	1/216

	x < -1	x<1	x < 2	x < 3	x ≥ 3
F (x)	0	125/216	200/216	215/216	1





(zur Erinnerung!)

Beispiel:

- F (1,5) = 200/216
- Wahrscheinlichkeit, einen Gewinn von mehr als 1 € und höchstens 3 € zu machen:
  P (1 < x ≤ 3) = F (3) – F (1) = 1 – 200/216 = 16/ 216

Eigenschaften der Verteilungsfunktion:

- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
- Rechtsseitig stetig, monoton steigend, aber nicht streng
- P (a < X ≤ b) = F (b) – F (a)
- P (X > a) = 1 – F (a)
- Sind die Sprungstellen von 1 bis k nummeriert und ist i < k, so gilt: $P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$

3 Mehrere Zufallsgrößen über einem Wahrscheinlichkeitsraum

3.1 Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung

Beispiel: Für den Lk werden folgende Zufallsgrößen definiert:

Geschlecht: Zufallsgröße X

0	1
männlich	weiblich
P(X = 0) = ...	P(X = 1) = ...

Religion: Zufallsgröße Y

1	2	3
katholisch	evangelisch	andere
P(Y = 1) = ...	P(Y = 2) = ...	P(Y = 3) = ...

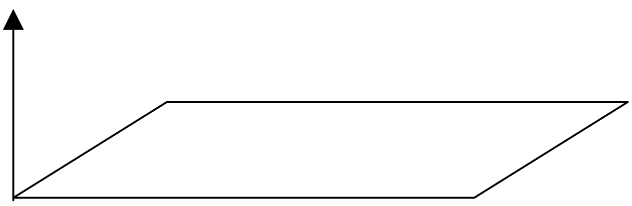
Unter der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsfunktion zweier Zufallsgrößen X, Y über dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum versteht man:

$$W_{X,Y} : (x/y) \mapsto P(X = x \wedge Y = y)$$

Hier:

P(X = x und Y = y)	Y = 1	Y = 2	Y = 3
X = 0			
X = 1			

Skizze: Dreidimensionale Darstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung



3.2 Unabhängigkeit zweier Zufallsgrößen

Zwei Zufallsgrößen X, Y auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum heißen stochastisch unabhängig, wenn für alle x, y $\in$ IR gilt:

$$P(X = x \text{ und } Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$$

Kontrolle in unserem Beispiel:

...

Kriterium:

Zwei Zufallsgrößen sind genau dann linear unabhängig, wenn die gemeinsame Wahrscheinlichkeitstabelle die Form einer Multiplikationstabelle hat.

4 Maßzahlen von Zufallsgrößen

Ziel:
Oft ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße sehr umfangreich. Man sucht daher durch charakteristische Maßzahlen sinnvolle Informationen zu gewinnen.

4.1 Definition des Erwartungswertes

Bei einem Glüchksspiel wird jeder Spieler daran interessiert sein zu erfahren, welchen mittleren Gewinn / Verlust er zu erwarten hat. Eine Möglichkeit diesen Gewinn- oder Velrustwert ungefähr zu erhalten wäre: Mache viele (n groß!) Spiele und teile den Gesamtgewinn(-verlust) durch die Anzahl der Spiele.
Einfacher und genauer:

Beispiel: Chuck – a – luck (Siehe III.1):
Bei großem n ist der Anteil der Spiele

- mit 1 € Verlust P (X = -1) = 125/216
- mit 1 € Gewinn P (X = 1) = 75/216
- mit 2 € Gewinn P (X = 2) = 15/216
- mit 3 € Gewinn P (X = 3) = 1/216

d. h. der zu erwartende Gesamtgewinn bei n Spielen ist
n · P (X = -1) · (-1 €) + n · P (X = 1) · 1 € + n · P (X = 2) · 2 € + n · P (X = -1) · 3 €
mittlerer Gewinn pro Spiel (: n)
P (X = -1) · (-1 €) + P (X = 1) · 1 € + P (X = 2) · 2 € + P (X = -1) · 3 €
=... = - 0,075 €

Definition
Die Zufallsgröße X habe die Wertemenge $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $P(X=x_i)$. Dann heißt die Zahl

$$\mu = \ (X) = \ X = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)x_i$$

Erwartungswert der Zufallsgröße X. (Der Buchstabe μ steht für Mittelwert)

Beispiele
1. Würfeln; X = „Augenzahl“
$(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2\cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6\cdot \frac{1}{6} = 3{,}5$
2. Zweimal Würfeln, X = „Augensumme“
(X) = 2 · 1/36 + 3 · 2/36 + 4 · 3/36 + ... + 11 · 2/36 + 12 · 1/36 =7
3. Zweimal Würfeln, Y = „Maximum“

	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13			16
2	21	32				
3	31	...				
4						
5						
6						66

	Y(ω) = 1	Y(ω) = 2	Y(ω) = 3	Y(ω) = 4	Y(ω) = 5	Y(ω) = 6
P (Y(ω) = y)	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36
(F(y)	1/36	4/36	9/36	16/36	25/36	1)

$(Y) = \ldots = 4\ \frac{17}{36}$

Beachte

1. Der Erwartungswert gibt die „Mitte“ der Lage der Verteilung an.
2. Erwartungswert einer konstanten Zufallsgröße: (c) = c

4.2 Erwartungswert als lineares Funktional

Beispiel:
Einfacher Würfelwurf,
Zufallsgröße X = Augenzahl
Zufallsgröße Y: von der doppelten Augenzahl wird 7 abgezogen. Die erhaltene Augenzahl gibt den Gewinn an.

Y ist eine Funktion der Zufallsgröße X: $Y(\omega) = 2\,X(\omega) - 7$.

Ges: Zusammenhang zwischen den Erwartungswerten. Günstiges Spiel?

$(X) = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 4 + \frac{1}{6}\cdot 5 + \frac{1}{6}\cdot 6 = 3{,}5$

$$(Y) = \sum_{i=1}^{n} P(Y = y_i) y_i = \tfrac{1}{6}\cdot(2\cdot 1 - 7) + \tfrac{1}{6}\cdot(2\cdot 2 - 7) + \tfrac{1}{6}\cdot(2\cdot 3 - 7) + \tfrac{1}{6}\cdot(2\cdot 4 - 7) + \tfrac{1}{6}\cdot(2\cdot 5 - 7) + \tfrac{1}{6}\cdot(2\cdot 6 - 7) =$$

$$= 2\cdot(\tfrac{1}{6}\cdot 1 + \tfrac{1}{6}\cdot 2 + \tfrac{1}{6}\cdot 3 + \tfrac{1}{6}\cdot 4 + \tfrac{1}{6}\cdot 5 + \tfrac{1}{6}\cdot 6) - \tfrac{1}{6}\cdot 7 - \tfrac{1}{6}\cdot 7 - \tfrac{1}{6}\cdot 7 - \tfrac{1}{6}\cdot 7 - \tfrac{1}{6}\cdot 7 - \tfrac{1}{6}\cdot 7$$

$$= 2\cdot \varepsilon(X) - 7$$

(Y) = 0, also ausgeglichen!

Allgemein gilt:
Der Erwartungswert ist ein **lineares Funktional**, d.h.

(I)	(X + Y) = (X) + (Y)
(II)	(aX) = a (X), a = const
(III)	(X + a) = (X) + a

Beweis z. B. zu (III):

$$(X) + a = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)x_i + 1\cdot a = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)x_i + \left(\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)\right)\cdot a = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)(x_i + a) = \varepsilon(X + a)$$

Beim letzten „=“ ist zu bemerken, dass sich die Wahrscheinlichkeiten durch das Hinzuzählen einer Konstante zur Zufallsgröße nicht ändert.

Beispiel:
In einem Gerät geht Bauteil 1 mit 10% Wahrscheinlichkeit kaputt. Reparaturkosten : 50 €
Bauteil 2 geht mit 8% Wahrscheinlichkeit kaputt. Kosten 30 €
In 60% der Fälle ist mit Bauteil 1 auch Bauteil 2 defekt.

x	0	50
P(X=x)	98%	2%

Mittlere Kosten/€ (X)= 5

y	0	30
P(Y =y)	0	8%

(Y)=2,4

P (X =x und Y = y)	**0**	**30**		
0	0,88	0,02	0,9	
50	0,04	0,06	0,1	
	0,92	0,08		

(X + Y) = 0,88 · 0 + 0,02 · 30 + 0,04 · 50 + 0,06 · 80 = 7,4
Schneller: (X)+ (Y) =7,4

Folgerung:
Weil (X) selbst eine Konstante ist, folgt aus (III)
(X - (X)) = (X) - (X) = 0

(IV) (X - (X)) = 0

Sind die Zufallsgrößen X und Y **unabhängig,** so gilt weiter:

(V) $(X \cdot Y) = (X) \cdot (Y)$

Beispiel:

Zwei Urnen U_X und U_Y enthalten Kugeln von 1 und 2 bzw. 2 und 4

X und Y sind die Kugelnummer. $(X) = 1{,}5$; $(Y) = 3$

Zufallsgröße $X \cdot Y$: $P(X \cdot Y = 2) = ¼$; $P(X \cdot Y = 4) = ½$; $P(X \cdot Y = 8) = ¼$

$(X \cdot Y) = 2 \cdot ¼ + 4 \cdot ½ + 8 \cdot ¼ = 4{,}5 = (X) \cdot (Y)$

Aus U_x wird gezogen. zieht man die 1, so erhält man 2 €, sonst 3 € (Zufallsvariable Z: Auszahlung).

$(X) = 1{,}5$; $(Z) = 2{,}5$

$(X \cdot Z) = P(X \cdot Z = 2) \cdot 2 + P(X \cdot Z = 3) \cdot 3 = ½ \cdot 2 + ½ \cdot 3 = 2{,}5 \neq (X) \cdot (Y)$

4.3 Varianz und Standardabweichung einer Zufallsgröße

Bsp Urne mit Kugeln 1 – 5, (X) = 3, auf welche Zahl am besten setzen? Problem Streuung um Erwartungswert abhängig von Anzahl der jeweiligen Kugeln.

Problem:
Wir suchen ein Maß für die mittlere Abweichung der Funktionswerte einer Zufallsgröße von ihrem Erwartungswert. Bisher haben wir keine Aussage, wie die Funktionswerte um μ „streuen".

Gesucht:
Mittlere Abweichung der Funktionswerte vom Erwartungswert. Bzw. Erwartungswert der mittleren Abweichung.

Vorschläge:
a. $(X - \mu)$ untauglich, da = 0 (Regel IV aus 4.2)
b. $|X - \mu|$ sinnvoll, aber kompliziert
c. $(X - \mu)^2$ wird verwendet

Definition:
Unter der **Varianz von X (Auch: mittleres Abweichungsquadrat)** versteht man den Erwartungswert von $(X - \mu)^2$.
$\boxed{\textbf{Var X} := (X - \mu)^2}$

Beispiele:
1. Einfacher Würfelwurf. X: Augenzahl
(X) = 3,5
$$\text{Var X} = \tfrac{1}{6}(1-3{,}5)^2 + \tfrac{1}{6}(2-3{,}5)^2 + \tfrac{1}{6}(3-3{,}5)^2 + \tfrac{1}{6}(4-3{,}5)^2 + \tfrac{1}{6}(5-3{,}5)^2 + \tfrac{1}{6}(1-3{,}5)^2 =$$
$$= \tfrac{1}{6}(2{,}5^2 + 1{,}5^2 + 0{,}5^2 + 0{,}5^2 + 1{,}5^2 + 2{,}5^2) = 2{,}916$$

2. Chuck-a –luck. X: Gewinn
(X) = -0,078 €
$$\text{Var X} = \tfrac{125}{216}(-1+0{,}078)^2 + \tfrac{75}{216}(1+0{,}078)^2 + \tfrac{15}{216}(2+0{,}078)^2 + \tfrac{1}{216}(3+0{,}078)^2 = 1{,}239$$
Einheit wäre hier €²!
S 195/44 HA 58

Deshalb:

Definition:
Als **Standardabweichung bzw. Streuung** der Zufallsgröße X bezeichnet man die Zahl
$\boxed{\sigma(X) := \sqrt{\text{VarX}}}$
Sie stellt ein mittleres Maß für die Abweichung der Werte der Zufallsgröße von ihrem Erwartungswert dar.

Bemerkung:
Die Varianz und Standardabweichung sind nicht so leicht anschaulich begreifbar wie Erwartungswert und wie $|X - \mu|$ es wäre. Im Vergleich zweier Zufallsgrößen kann man damit Abweichungen vom Erwartungswert beschreiben.

Aus urheberrechtlichen Gründen können die Beispiele hierzu nicht im Internet veröffentlicht werden, ich bitte um Verständnis!

Rechengesetze für die Varianz:

(I) $Var\ (c) = 0$

Begründung: $Var\ (c) = \ (X - \mu)^2 = \ (c - c)^2 = \ (0) = 0$

(II) $Var\ (X) = \ (X^2) - \ (X)^2$

Begründung: $Var\ (X) = \ (X - \mu)^2 = \ (X^2 - 2X\mu + \mu^2) = \ (X^2)-2\mu\ (X) + \ (\mu^2) = \ (X^2)-2\mu^2 + \mu^2$ => Beh.

(III) $Var\ (X + a) = Var\ X$

Begründung: $Var\ (X + a) = \ (X + a - \ (X + a))^2 = \ (X + a - \mu - a)^2$ => Beh.

(IV) $Var\ (aX) = a^2\ Var\ X$

Begründung: $Var\ (aX) = \ (aX - \ (aX))^2 = \ (a\ (X - \ (X))\ )^2 = a^2\ (\ (X - \ (X))\ )^2$ => Beh

Folgerung

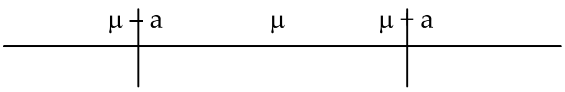
(V) $Var\ (aX+b) = a^2\ Var\ X$

(VI) $Var\ (X + Y) = Var\ X + Var\ Y$,
falls X, Y unabhängig

Begründung: $Var\ (aX) = \ (aX - \ (aX))^2 = \ (a\ (X - \ (X))\ )^2 = a^2\ (\ (X - \ (X))\ )^2$ => Beh

4.4 Die Ungleichung von Tschebyschow

Problem: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert der Zufallsvariablen um mehr als a von ihrem Erwartungswert μ abweicht?



- *Bei wenigen diskreten Wert trivial? Zusammenhang mit Varianz?*

Es gilt:

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(X = x_i)$$

$$= \sum_{\mathrm{imit}|x_1-\mu|<a} (x_i - \mu)^2 P(X = x_i) + \sum_{|x_1-\mu|\geq a} (x_i - \mu)^2 P(X = x_i)$$

$$\geq \sum_{|x_1-\mu|\geq a} (x_i - \mu)^2 P(X = x_i)$$

$$\geq \sum_{|x_1-\mu|\geq a} a^2 P(X = x_i)$$

$$= a^2 P(|X - \mu| \geq a)$$

und damit:

$$\boxed{\text{Tschebyschow-Ungleichung: } P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2} \quad (\text{für } a > 0)}$$

Folgerung:
Wegen $P(|X - \mu| \geq a) = 1 - P(|X - \mu| < a)$ folgt

$$P(|X - \mu| < a) \geq 1 - \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}$$

Außerdem kann das „=“ in der oberen Ungleichung weggelassen werden (beide Male!, Beweis analog zu oben); unten kann man es austauschen (beide Male!).
S196/61

Bemerkung:
Es erschließt sich nun auch mehr die Bedeutung von σ. Mit $a = k\sigma$ folgt nämlich:

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

k	$P(\lvert X - \mu\rvert \geq k\sigma) \leq$	Trefferwahrscheinlichkeit für den $k\sigma$ -Bereich $\geq$
1	1 (trivial, wenig hilfreich)	0
2	¼	¾ = 0,75
3	1/9	8/9 = 88,$\underline{8}$%
4	1/16	15/16 = 93,75%