IV Bernoulli-Experiment und Binomialverteilung

1 Bernoulli-Experiment und Bernoullikette

Definition:
Zufallsexperimente, bei denen man sich nur für das Eintreten (**„Treffer", Symbol „1")** oder das Nichteintreten (**„Niete", Symbol „0")** eines Ereignisses interessiert, nennt man **Bernoulliexperiment.**
$\Omega = \{0,1\}$

Ist ein Bernoulliexperiment automatisch ein Laplaceexperiment? Nein. z.B. Sechser oder Nichtsechser beim Würfeln

Beispiele:
Münzwurf (Kopf/ Nicht-Kopf (Zahl))
Würfel (6, Nicht-6)
Olaf, go (links/rechts)
Urne (weiße Kugel, nicht-weiß)
Qualitätsprüfung, gut – kaputt
Beachte:
1. Ein Bernoulliexperiment ist nicht notwendig ein Laplace-Experiment.
2. p Trefferwahrscheinlichkeit => q = 1 – p Nietenwahrscheinlichkeit

Mündliches Beispiel:
Jetzt 5 mal nacheinander würfeln, Treffer bei 6:

$$P\,(2\ \text{Treffer}) = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^2$$

Definition:
Eine Folge von n unabhängigen Bernoulli-Experimenten mit gleicher Trefferwahrscheinlichkeit p heißt **Bernoullikette der Länge n.**

Beispiel:
Ein 18-köpfiger LK trifft sich zum Unterricht. Die Anwesenheit wird durch ein 18- Tupel (0|1|0...) beschrieben. Jedem Tupel des Ergebnisraums wird durch die Zufallsgröße X die Anzahl der anwesenden Schüler zugeordnet.
Ist unser Beispiel eine Bernoullikette? Was muss vorausgesetzt werden? Auftauchwahrscheinlichkeiten müssen alle gleich groß sein. Also nicht: Wenn einer gerne ausschläft oder die Oma pflegen muss, kommt er seltener. Also: Gleich große Tristesse der verschiedenen Schülerleben vorausgesetzt. Darüber hinaus muss jeder mit der gleichen W. unabhängig von allen anderen auftauchen. Also nicht: Wenn der Igor kommt, komme ich nicht.

Deshalb: Jeder Schüler kommt zum Kurs mit einer Wahrscheinlichkeit von p = 80% unbeeinflusst von allen anderen. (also Bernoulli-Kette der Länge n)
1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten fünf Schüler des 18-Tupels nicht kommen, der Rest jedoch anwesend ist? Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,8 Nietenwahrscheinlichkeit: q = 1-p = 0,2
Lösung: $0{,}2^5 \cdot 0{,}8^{13}$
2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass an dem Abend k Schüler anwesend sind?
Wir interessieren uns also nur für die Werte der Zufallsgröße X, die angibt, wie viele Anwesende (Treffer) ein n-Tupel hat. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung für diese Zufallsgröße heißt Binomialverteilung:

$$P(X = k) = \binom{18}{k} 0{,}8^k (0{,}2)^{16-k}$$

Damit ist die Wahrscheinlichkeit für zum Beispiel 14 anwesende Schüler:

$$B(18;0,8;14) = \binom{18}{14} 0{,}8^{14} 0{,}2^{4} = 3060 \cdot 0{,}8^{14} \cdot 0{,}2^{4} = 0{,}21.$$

2 Binomialverteilung

Allgemein: Eine Zufallsgröße X heißt binomial verteilt nach B(n;p) falls X nur Werte aus {0,1, ..., n} annimmt und es gilt: $P(X = k) = B(n,p,k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Die zu B(n,p,k) gehörige Verteilungsfunktion F^n_p hat für $k \in \{0,1, \ldots ,n\}$ folgenden Wert

$$F_p^n(k) = \sum_{i=0}^{k} B(n,p,i)$$

Beispiel zur Verwendung des Tafelwerks

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Kollegstufe von 100 unabhängigen Personen, die zu 90% anwesend sind,

a) genau b) höchstens

92 Personen anwesend sind?

Mit Tafelwerk:

$B(100;0,9;92) = 11{,}482\%$ $F_{0,8}^{100}(92) = 79{,}395\%$

Eigenschaften der Binomialverteilung und ihrer Verteilungsfunktion

1) $B(n,p,k) = B(n, q, n-k)$
2) $F^n_p(k) = 1 - F^n_{1-p}(n-k-1)$
3) Erwartungswert $E(X) = np$ Varianz $Var(X) = npq$

Beweise:

zu 1) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$, also $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{n-k} (1-p)^{n-k} p^k = \binom{n}{n-k} q^{n-k} (1-q)^k$

kürzer: genau k Treffer ⇔ genau n – k Nieten

zu 2) P(Höchstens k Treffer)=P(Mindestens n – k Nieten) = 1 – P (Höchstens n – k – 1 Nieten)

zu 3) Mit der Formel (I) (X + Y) = (X) + (Y) aus 4.2 betrachten wir die Elemente der Bernoullikette. Jedes der n Experimente liefert mit Wahrscheinlichkeit p den Ausgang 1 und mit 1 – p Ausgang 0. Der Erwartungswert ist also jeweils p, aufsummiert np.

Aufgrund der Unabhängigkeit lässt sich ein Additionsgesetz auch für die Varianz verwenden. Die Varianz eines Experiments ist dann $(1-p)^2 \cdot p + (0-p)^2 \cdot q = p - 2p^2 + p^3 + p^2(1-p)$
$= p - 2p^2 + p^3 + p^2 - p^3 = p - p^2 = p(1-p) = pq$

Insgesamt mit Summenregel: Var X = npq

3 *Das Gesetz der großen Zahlen*

Sei X eine binomialverteilte Zufallsgröße.

Dann gilt die Tschebyschow-Ungleichung:

$$P(|X-\mu| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}$$

$$P(|X-np| \geq a) \leq \frac{npq}{a^2}$$

Da sich an der Aussage der inneren Ungleichung nichts ändert, wenn man die Ungleichung durch n teilt, folgt:

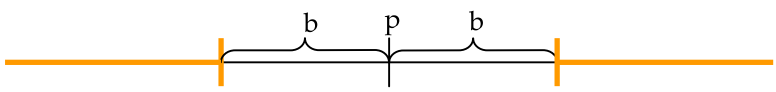
$$P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right| \geq \frac{a}{n}\right) \leq \frac{npq}{a^2}$$

mit den Abkürzungen b := a/n und H_n := X/n für die relative Häufigkeit gilt:

$$P(|h_n-p| \geq b) \leq \frac{pq}{nb^2}$$

da pq = p(1-p) <= ¼ folgt:

Für die relative Häufigkeit h_n der Treffer einer Bernoullikette der Länge n gilt die Tschebyschow-Ungleichung: FS 107 $$P(\lvert h_n-p\rvert \geq b) \leq \frac{1}{4nb^2}$$



Das Tschebyschow-Risiko (Term auf der linken Ungleichungsseite) wurde hier durch $\frac{1}{4nb^2}$ abgeschätzt.

Für das Gegenereignis gilt dann:

$$P(|H_n-p| < b) \geq 1-\frac{1}{4nb^2}$$

Im Grenzfall n -> ∞ folgt:

Schwaches Gesetz der großen Zahlen von Jakob Bernoulli (FS 106)
Sei b > 0 beliebig klein, dann gilt:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P(|h_n-p| < b) = 1}$$

In Worten: Die Wahrscheinlichkeit, dass sich bei einer Bernoullikette die relative Häufigkeit H_n für einen Treffer von der Trefferwahrscheinlichkeit p um weniger als einen beliebig (kleinen!!!) vorgegebenen Wert b unterscheidet, strebt gegen 1, wenn die Anzahl der Experimente gegen unendlich geht.

Man sagt: h_n konvergiert stochastisch nach p.

Bemerkung:

1. Das Gesetz der großen Zahlen zeigt, dass der Wahrscheinlichkeitsbegriff, der allgemein nach Kolmogorow definiert wurde, sinnvoll ist. Große Abweichungen von der Wahrscheinlichkeit sind für große n unwahrscheinlich.
2. Die Betrachtung des Falles b = 0 ist nicht sinnvoll. In diesem Fall ergäbe sich das Gegenteil: $\lim P(h_n = p) = 0$
3. Im Intervall]p – b, p + b[der Länge 2 b liegen für großes n sehr viele mögliche Werte für H_n – da die möglichen Werte im Abstand 1/n liegen, gibt es insgesamt 2b/(1/n) = 2bn davon. Jeder Wert kann eine sehr kleine Wahrscheinlichkeit haben, zusammen ergeben sie aber beinahe 1. Man darf also nicht schließen: $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = p$

Beispiel:

In 2678 Lottoziehungen fiel die 2 389 mal, 53 mal öfter als zu erwarten. Für die relative Häufigkeit bedeutet dies eine Abweichung von 53/2678 = 1,9% vom Sollwert.

Starkes Gesetz der großen Zahlen von Borel - Cantelli:

$\boxed{P(\lim\limits_{n\to\infty} h_n = p) = 1}$

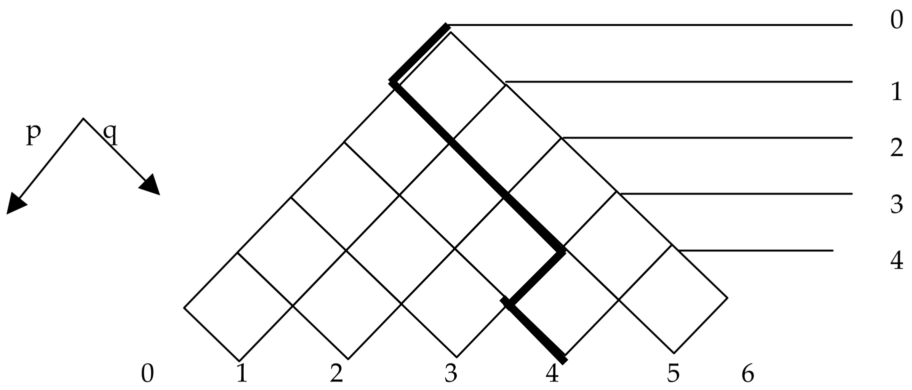
Sprich: Die relative Häufigkeit konvergiert **fast sicher** gegen die Wahrscheinlichkeit.

4 Veranschaulichung der Binomialverteilung durch Experimente

Beispiel 1: Untersuchung von B(10, ½)
Experiment: 10 mal Würfeln und merken, wie oft Zahl.
Jeder Schüler führt das Experiment drei mal durch, hat also dann drei Zahlen von 0 bis 10.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Abs. Häuf.										
Rel. Häuf.										
B(10,½,k)	0,000976	0,009765	0,043945	0,11718	0,205078	0,246093	0,205078	0,11718	0,043945	0,009765

Beispiel 2: Galtonbrett
- *Betrunkener geht nach Hause in Amerika (immer dem Sonnenaufgang entgegen)*



Wahrscheinlichkeit, dass man in der 6. Zeile in der vierten Spalte landet:

$$P(A) = \binom{6}{2} p^2 (1-p)^{6-2}$$

Nehmen wir an p = 0,5. Galtonbrett vorführen.