# V Normalverteilung als Näherung der Binomialverteilung

Gegeben ist eine nach B(n,p) verteilte Zufallsgröße mit großem n. Stehen die Wahrscheinlichkeiten für das betreffende n nicht in der Tabelle (z.B. weil n zu groß ist), dann ist man auf Abschätzungen angewiesen. Beispielsweise bereitet die Berechnung von B (10000, ½, 5000) = $\binom{10000}{5000}\left(\frac{1}{2}\right)^{10000}$ immer noch erhebliche numerische Schwierigkeiten.
Ungenaue Abschätzungen liefert die Tschebyschow-Ungleichung. Mit ihr erhält man Abschätzungen für Intervalle symmetrisch zum Erwartungswert ( $|X-\mu| < a$ ).

Recht genaue Abschätzungen lassen sich dadurch erzielen, dass man die B(n,p)-Verteilung gezielt durch „Näherungen" ersetzt, die unabhängig vom verwendeten n immer verwendbar sind, vorausgesetzt, n ist groß genug.

**Beispiel: Poissonverteilung**
Verwendung für sehr großes n und p nahe Null.

B (n,p,k) ≈ $\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}$

Ein reales Problem:
1 $mm^3$ Materie besitzt ungefähr $(10^7)^3 = 10^{21}$ Atome. Gegeben sei 1 $mm^3$ schwach radioaktives Material. Man stellt im Schnitt 10 Zerfälle pro Sekunde fest. Für jedes Atom existiert die Wahrscheinlichkeit p, in der nächsten Sekunde zu zerfallen. Für die Gesamtheit der Atome ist dann der Erwartungswert $n \cdot p = 10^{21} \cdot p = 10$ (Zerfälle pro Sekunde)
Es gilt also: $p = 10^{-20}$. Ein Problem, das sich durch die Poissonnäherung lösen lässt.
Wahrscheinlichkeit für 9 Zerfälle: 12,5%

**Im Kurs wird vorgestellt:** Normalverteilung
Verwendung für große n und p deutlich > 0

## 1 *Standardisierung einer Zufallsgröße*

Folie B (n, 0,2, k) mit n = 10, 20, 50, 100
Es sei EX = $\mu$, Var X = $\sigma^2$

Betrachte die Zufallsgröße $\boxed{T = \frac{X-\mu}{\sigma}}$ (*)

Es gilt: $\boxed{ET = 0, \text{Var } T = 1}$

$$E(T) = E\left(\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{1}{\sigma(X)}E\big(X-E(X)\big) = \frac{1}{\sigma(X)}\big(E(X)-E(X)\big) = 0$$

$$\text{Var}T = \text{Var}\left(\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{1}{\sigma(X)^2}\text{Var}(X-E(X)) = \frac{\text{Var}(X)}{\sigma(X)^2} = 1$$

**Definition**
Eine Zufallsgröße mit dem Erwartungswert 0 und der Varianz 1 heißt **standardisiert.** Jede Zufallsgröße lässt sich mit Hilfe der Transformation (*) standardisieren.

**Bemerkung:**
(1) Die Höhen der Rechtecke in der Histogrammdarstellung müssen mit dem Faktor $\sigma$ multipliziert werden, da die Rechtecksbreiten um den Faktor $1/\sigma$ verändert werden.
(2) Durch die Standardisierung wir bei der Verteilungsfunktion nur die Lage der Sprungstellen, nicht deren Höhe verändert.

# 2 Dichtefunktionen (Histogramme) von X und T

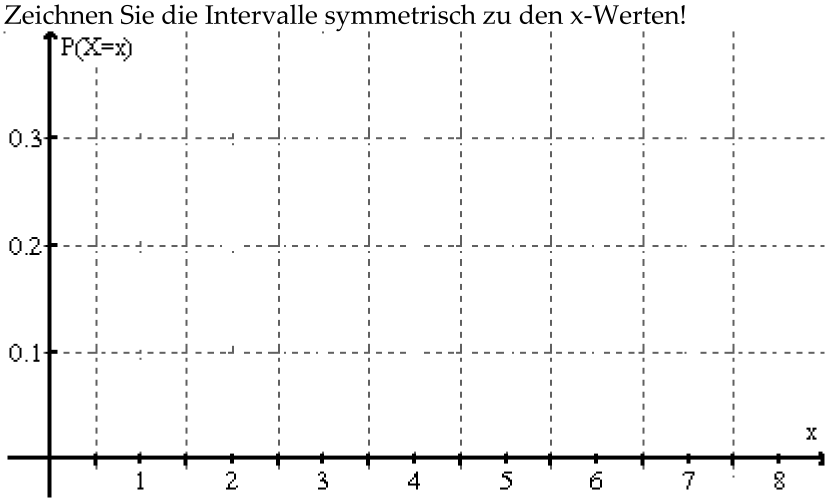
- Die Wahrscheinlichkeiten werden als Rechtecksflächen dargestellt.
- Die Flächeninhalte entsprechen den Wahrscheinlichkeiten
- Die Rechtecke stoßen unmittelbar aneinander

**Beispiel: Sei X nach B (8; 0,4) verteilt**
***Dichtefunktion von X***: Es werden Intervalle der Breite 1 gezeichnet.

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P(X=x) | 0,0168 | 0,0896 | 0,2090 | 0,2787 | 0,2322 | 0,1239 | 0,0413 | 0,0079 | 0,0007 |

$\mathcal{E}$X = .................................... Var X = .......................................... σ = .....................................................

Zeichnen Sie die Intervalle symmetrisch zu den x-Werten!

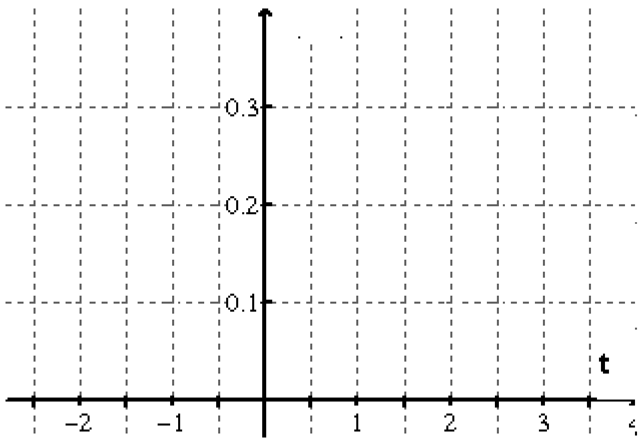



***Dichtefunktion von T***

T = $\frac{\text{.....................}}{\text{..................}}$ = 0,72 · (X – 3,2) t = 0,72 · (x – 3,2)

Intervallbreiten: 0,72 = ............................................
Rechteckhöhen: P(X = x) · 1,39 („ · ................)

| t | -2,30 | -1,58 | -0,86 | -0,14 | 0,58 | 1,29 | 2,01 | 2,73 | 3,45 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rho_8$ (t) =1,39·P(X=x) | 0,023 | 0,125 | 0,291 | 0,387 | 0,323 | 0,172 | 0,057 | 0,011 | 0,001 |

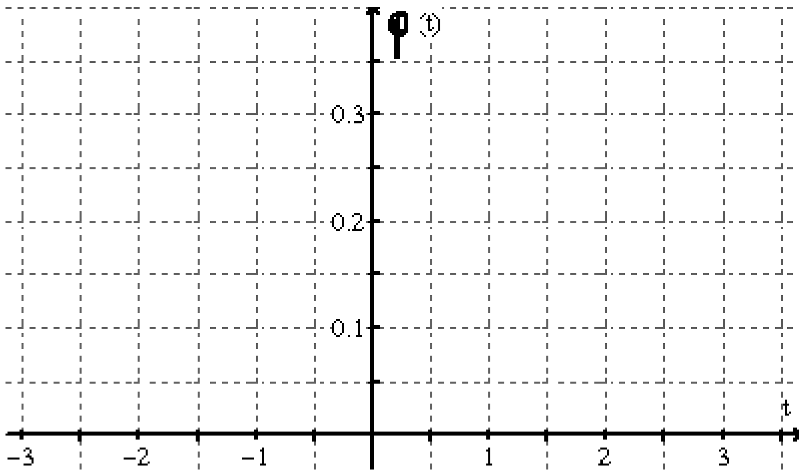



Dichtefunktion $\varphi_8$ (t) der standardisierten Normalverteilung B(8;0,4)

**Bemerkungen:**

1. Die Wahrscheinlichkeiten lassen sich bei beiden Dichtefunktionen aus den Rechtecksflächen ablesen. Die Wahrscheinlichkeiten sind identisch.
2. Die Wahrscheinlichkeitsberechnung in Intervallen lässt sich also als eine Flächenberechnung (=Integration!) verstehen.
3. Weitere Dichtefunktionen standardisierter Zufallsgrößen siehe S. 199.
4. Man erkennt, dass sich der Graph für große n an eine Glockenform symmetrisch zur y-Achse annähert (S. 199 unten).
5. Auf kompliziertem Wege lässt sich zeigen, dass sich der Graph der Dichtefunktion für n -> ∞ bei jedem fest gegebenen p > 0 gegen die Funktion
   $\boxed{\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}}$ konvergiert.

| t | 0 | ±0,5 | ±1 | ±1,5 | ±2 | ±2,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| φ (t) | 0,399 | 0,352 | 0,242 | 0,130 | 0,054 | 0,018 |




**Bemerkungen:**

1. Die Summe aller Flächeninhalte der Rechtecksflächen war 1 (Summe aller Wahrscheinlichkeiten!)
   => $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx \overset{!}{=} 1$
2. Flächeninhalte unter der Kurve in Teilintervallen geben die Wahrscheinlichkeiten an (P( r ≤ X ≤ s) u.s.w., mehr dazu später!)

**Definition:**

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung mit der Dichtefunktion $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$ heißt **Normalverteilung.**

# 3 Anwendung des lokalen Grenzwertsatzes

**Lokaler Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace**
Die Dichtefunktionen $\varphi_n$ der standardisierten Binomialverteilung B(n,p) mit $0 < p < 1$ streben mit wachsendem n gegen die Grenzfunktion

$\boxed{\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}}$ $t \in$ IR (FS S 110 f, Tafelwerk S. 50 ff)

(ohne Beweis)

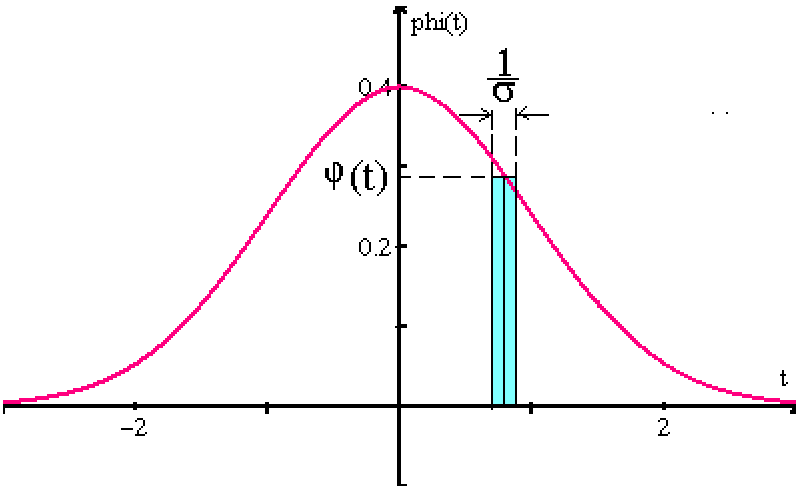
Mit Hilfe der Funktionswerte von $\varphi$ (Tafelwerk, TR) lassen sich für genügend große n sehr gute Näherungen für B(n,p) ermitteln.

**Faustregel:** $\sigma^2 = npq > 9$

**Zur Erinnerung (Kap. 2)**
Um die Funktionswerte von $\varphi_n$ zu bestimmen, wurden die ursprünglichen Wahrscheinlichkeiten mit $\sigma = \sqrt{npq}$ multipliziert.

Es war: $\sigma \cdot B(n,p,k) = \varphi_n\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) \approx \varphi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)$

$\Rightarrow B(n,p,k) \approx \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)$




Geometrische Interpretation:
Rechtecksfläche!

**Beispiel**
B (100; 0,4; 42)
Es gilt:
$\sigma = \sqrt{npq} = 4{,}9$ $\mu = np = 40$

B (100; 0,4; 42) = $\frac{1}{4{,}90} \cdot \varphi\left(\frac{42-40}{4{,}90}\right) = \frac{1}{4{,}90}\varphi(0{,}408) \approx$ (Tabelle) 0,075

Exakt: 0,07421

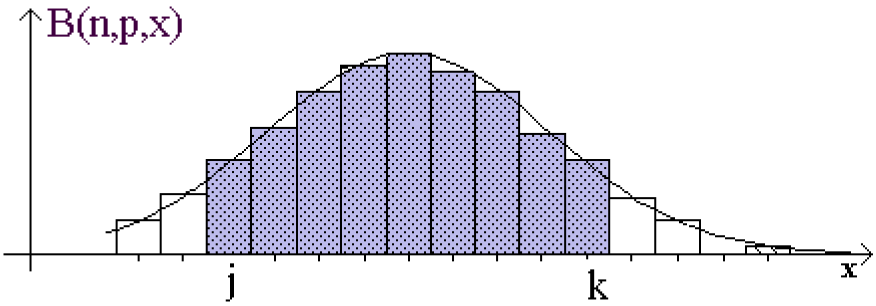
B(100, 0,4, 30) = ?
B (124, 0,43, 50) = ?

S. 206/103a, 104a, 105ac

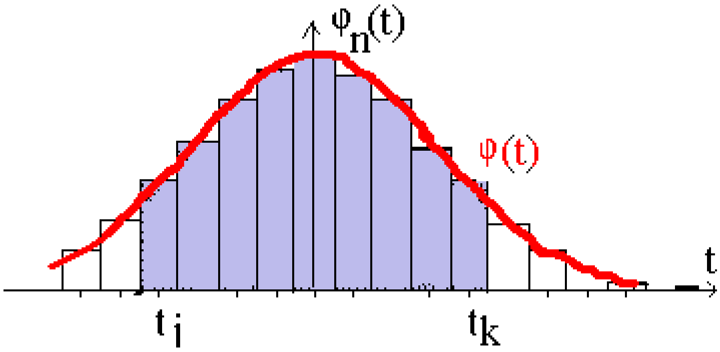
## 4 *Integraler Grenzwertsatz von de Moivre und Laplace*

Gegeben: eine nach B(n,p) verteilte Zufallsgröße X

P ($r \leq X \leq s$) = F (s) – F (r) (F ist die kumulative Verteilungsfunktion)
Dies entspricht im Histogramm der Summe der Balkenflächen von j – 0,5 bis k + 0,5.




Bei der Standardisierung (siehe Kap. 2) bleibt diese Gesamtfläche als Fläche der Balken zwischen $t_j - \frac{0,5}{\sigma} = \frac{j-\mu-0,5}{\sigma}$ und $t_{k} + \frac{0,5}{\sigma} = \frac{k-\mu+0,5}{\sigma}$ erhalten.




$x_1 = t_j - \frac{0,5}{\sigma} = \frac{j-\mu-0,5}{\sigma}$ ; $x_2 = t_{k} + \frac{0,5}{\sigma} = \frac{k-\mu+0,5}{\sigma}$

Für große n nähert sich nach Kap 2 $_n$ an an und somit die gesuchte Fläche an

$\int_{x1}^{x2} \varphi(t)dt$ an.

**Bemerkungen:**

1. Eine Stammfunktion von lässt sich nur mit Methoden der Numerischen Mathematik näherungsweise bestimmen.
2. Eine Stammfunktion $\phi$ liegt im Tabellenwerk vor, und zwar

$\boxed{\Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt \text{ Gaußsche Integralfunktion.}}$

3. $\phi$ ist nur für $x > 0$ tabelliert. Wegen Symmetrie von und Gesamtfläche 1 gilt: $\phi(-a) = 1 - \phi(a)$

**Integraler Grenzwertsatz**
Ist X B(n,p)-verteilt und $k \in \{0,1,...n\}$, so gilt für große n die Näherung

$$\boxed{P(X \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k-\mu+0,5}{\sigma}\right)}$$

z.B. n = 130, p = 0,3; $35 < k \leq 45$...
Bem: Große Wahrscheinlichkeit, da das Intervall den Bereich um $\mu$ enthält.

# 5 Typische Aufgabenstellungen für die Normalverteilung

**Wiederholung:**

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung mit der Dichtefunktion $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$ heißt **Normalverteilung.**

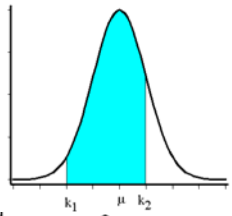
$\Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$ Gaußsche Integralfunktion

$P(X \le k) \approx \Phi\left(\frac{k-\mu+0{,}5}{\sigma}\right)$ Näherung der Binomialverteilung

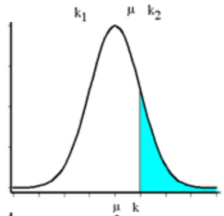
***A) Berechnung von Wahrscheinlichkeiten – Typische Beispiele***

i) $P(k_1 \le X \le k_2) = P(k_1 - 1 < X \le k_2) = \Phi\left(\frac{k_2-\mu+0{,}5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{k_1-1-\mu+0{,}5}{\sigma}\right)$

Der Zähler rechts lässt sich vereinfachen durch $k_1 - \mu - 0{,}5$.

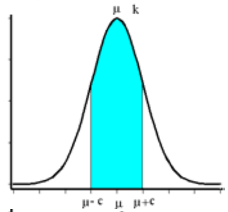



ii) $P(X > k) = 1 - P(X \le k) = 1 - \Phi\left(\frac{k-\mu+0{,}5}{\sigma}\right)$

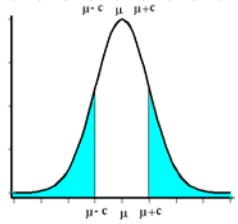



iii) $P(|X - \mu| \le c) = P(\mu - c \le X \le \mu + c) = \Phi\left(\frac{c+0{,}5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-c-0{,}5}{\sigma}\right)$

$= \Phi\left(\frac{c+0{,}5}{\sigma}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{c+0{,}5}{\sigma}\right)\right) = 2\,\Phi\left(\frac{c+0{,}5}{\sigma}\right) - 1$




iv) $P(|X - \mu| > c) = 1 - P(|X - \mu| \le c) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{c+0{,}5}{\sigma}\right)\right)$




***B) Bestimmung der Trefferzahl k***

Am Beispiel.

***C) Bestimmung der Anzahl n der Versuche***

Am Beispiel.

# 6 Der zentrale Grenzwertsatz

Die Normalverteilung ist nicht nur für B(n;p)-verteilte Zufallsgrößen verwendbar, sondern auch für andere Fälle.

**Beispiel:**
Sei S die Würfelsumme bei n Würfen mit L-Würfel
S $=X_1 + X_2 + ... + X_n$, wobei $X_i$ die Augenzahl des Würfels beim i-ten Wurf ist.

| | | |
|---|---|---|
| Erwartungswert | $EX_i = 3{,}5$ für alle i | $\Rightarrow ES = n \cdot 3{,}5$ |
| Varianz | $\text{Var } X_i = 2{,}9$ (Kap. III.4.3) | $\Rightarrow \text{Var } S = n \cdot 2{,}916$ |

(Var X $= \frac{1}{6}(1-3{,}5)^2 + \frac{1}{6}(2-3{,}5)^2 + \frac{1}{6}(3-3{,}5)^2 + \frac{1}{6}(4-3{,}5)^2 + \frac{1}{6}(5-3{,}5)^2 + \frac{1}{6}(1-3{,}5)^2 =$
$= \frac{1}{6}(2{,}5^2 + 1{,}5^2 + 0{,}5^2 + 0{,}5^2 + 1{,}5^2 + 2{,}5^2) = 2{,}916$)

Wir wählen nun $n = 1000$ und suchen $P(3450 \le S \le 3600)$.
$ES = 3500$, $\text{Var } S = 2916$, $\sigma = 54$

Beachten Sie, dass die Zufallsgröße nicht B(n,p)-verteilt ist! Die $X_i$ sind keine Bernoulliexperimente.
Dennoch lässt sich das Problem mit der Normalverteilung lösen (S. Grafiken Buch S. 214):

$$x_2 = \frac{3600 - \mu + 0{,}5}{\sigma} = 1{,}86$$

$$x_1 = \frac{3450 - \mu - 0{,}5}{\sigma} = -0{,}94$$

$P(3450 \le S \le 3600) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(1{,}86) - (1 - \Phi(+0{,}94)) = 0{,}969 - 1 + 0{,}826 = 0{,}795$

**Zentraler Grenzwertsatz**
$X_i$ $(i = 1,2...,n)$ sei eine Folge von unabhängigen Zufallsgrößen
Sei $X := X_1 + X_2 + ... + X_n$ mit Erwartungswert $\mu = \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_n$ und $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + ... + \sigma_n^2$ als Varianz.
Weiter soll es reelle Zahlen A und B geben, so dass $0 < A < \text{Var } X_i < B$ (*d.h. die Varianzen sollen nicht unendlich groß bzw. klein sein).*

Dann gilt für hinreichend großes n: $\boxed{P(X \le x) \approx \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}$